Formes mathématiques

Les trous du cube

Lors du dernier salon des Jeux mathématiques organisé par le CIJM*, un sympathique visiteur nous a proposé le casse-tête suivant : un cube de bois est percé de part en part au centre de chaque face, de sorte que tous les petits tunnels se rencontrent au centre du cube. La question est la suivante : combien y a-t-il de trous ?

PAR **ROMAIN ATTAL,** MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Les curieux confrontés à cette petite énigme proposent fréquemment les réponses suivantes : 1) « Je vois un trou par face, et un cube a 6 faces. Il y a donc 6 trous. » Dans ce cas, un trou est un petit tunnel cylindrique qui joint chaque face au centre du cube.

2) « Je vois 6 trous de l'extérieur, mais il y a aussi un trou au centre, ce qui fait 7 en tout. » Dans ce cas, un trou est perçu comme l'absence d'un petit cube dans un grand cube constitué de 27 petits cubes. Le cube troué est alors assimilé à la première étape de la construction de l'éponge de Sierpinski-Menger (fig. 1).

3) « De l'extérieur, je vois 6 trous, mais de l'intérieur, j'en vois encore 6. Il y en a donc 12 en tout. » Dans ce cas, un trou est un contour circulaire visible de l'extérieur ou de l'intérieur.

4) « Pour fabriquer ce cube, je donne 3 coups de perceuse. Il n'y a donc que 3 trous. » Un trou est ici défini comme tout le tunnel cylindrique qui joint deux faces opposées.

5) « Tous les tunnels étant reliés, il n'y a qu'un seul trou. » Dans ce cas, un trou est vu comme la partie de

*CIJM : Comité international des jeux mathématiques.

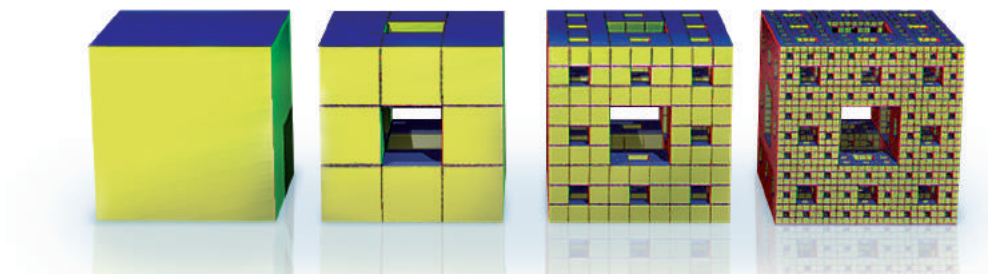

Figure 1. Les trois premières étapes de la construction de l'éponge de Sierpinski-Menger. Prenez un grand cube et divisez en 3 chacune de ses arêtes : cela vous permet de subdiviser chaque face en 9 petits carrés et le grand cube en 27 petits cubes. Enlevez alors le petit cube au centre de chaque face ainsi que celui au centre du grand cube. En répétant cette opération dans les 20 cubes qui restent, puis en continuant à l'infini, vous obtiendrez l'éponge de Sierpinski-Menger.

Figure 2. Une collection de surfaces trouées. Pour ces objets simples, le nombre de trous est facile à déterminer : le premier objet n'a pas de trou, le second en a un seul, le troisième en a deux, etc.
Figure 3. Comptons les trous d'objets de la vie courante. Combien de trous possède un verre, une tasse, une cocotte, un bretzel ?

l'espace complémentaire du cube de bois et d'un seul tenant. Notons que l'observateur est aussi dans ce trou puisqu'il n'est pas dans le bois !
6) « Puisqu'il n'y a pas de cavité à l'intérieur du cube, il y a 0 trou. » Dans ce cas, un trou est vu comme une cavité ou une bulle d'air prisonnière dans une meule d'emmental.

UN PEU DE TOPOLOGIE

Afin de nous mettre d'accord, nous devons donc d'abord répondre à une question fondamentale : qu'est-ce qu'un trou ? Plus précisément, comment les mathématiciens définissent-ils la notion, plutôt obscure, de trou ? Tout au moins, comment font-ils pour les compter ? La réponse est moins simple que la question car elle fait appel à des notions de topologie algébrique (encadré *Comment compter les trous d'une surface ?*). Essayons de nous convaincre, par des arguments plus simples mais moins rigoureux, qu'aucune des réponses précédentes ne serait celle du mathématicien.
En topologie tout se passe comme si les objets étudiés étaient faits d'une pâte à modeler imaginaire, qui serait à

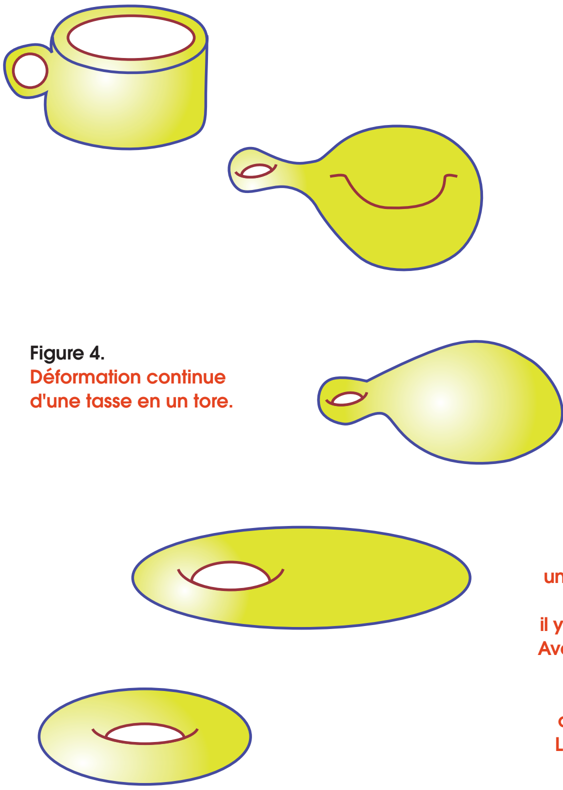

Figure 4.
Déformation continue d'une tasse en un tore.

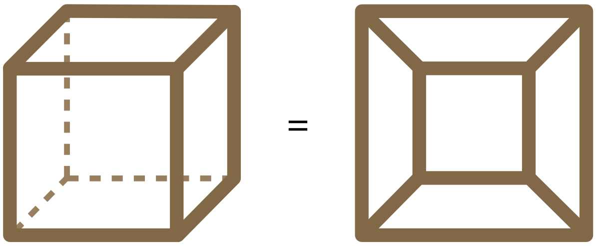

Figure 5.
Notre cube a cinq trous.

Figure 6.
Si l'on met un bouchon dans un trou du cube, il y en a un de moins. Avec cinq bouchons, on obtient un petit gobelet de bois qui n'a pas de trou. Le cube troué initial a donc cinq trous.

la fois déformable, compressible, extensible, mais increvable, indéchirable et non soudable. Dans ce cadre, deux objets qui s'obtiennent l'un à partir de l'autre par déformation continue (c'est-à-dire sans couper ni coller) sont considérés comme équivalents. Ils partagent des propriétés communes que l'on appelle des invariants topologiques. Or le nombre de trous d'un objet est un invariant topologique : il n'est pas modifié si l'on déforme l'objet continûment.

COMBIEN DE TROUS DANS UN VERRE ?

Donnons-nous quelques surfaces de référence dont le nombre de trous est évident (fig. 2). Une de ces surfaces peut-elle être obtenue à partir du cube par déformation continue ? Avant de répondre à cette question, et pour être sûrs de bien comprendre le principe, amusons-nous à faire le même exercice avec des objets de la vie courante (fig. 3). Pour le bretzel, il n'est pas nécessaire de le déformer pour s'en rendre compte : il a trois trous. Pour un verre, on pourrait croire qu'il a un trou, mais si vous appuyez sur un verre en pâte à modeler, vous pouvez en faire une galette comme sur la figure 2. Donc un verre n'a pas de trou mais un creux ! Une tasse munie d'une anse, elle, en possède un : il est possible de la déformer pour obtenir un tore (fig.4). Une cocotte à deux anses possède deux trous.

ET LA RÉPONSE EST… AUCUNE DES SIX !

Revenons à notre cube percé. Faisons-le maigrir en agrandissant les trous jusqu'aux arêtes. Ensuite, aplatissons-le : on obtient une surface qui possède manifestement cinq trous (fig. 5). Boris Asancheyev, que nous remercions pour nous avoir proposé cette énigme amusante et instructive, donne une autre solution à ce problème, qui consiste à compter les trous en les bouchant successivement (fig. 6). Avec cinq bouchons, le cube donne un gobelet, qui n'a pas de trou. Le cube troué possède donc bien cinq trous. **R. A.**

Pour aller plus loin

Comment compter les trous d'une surface ?

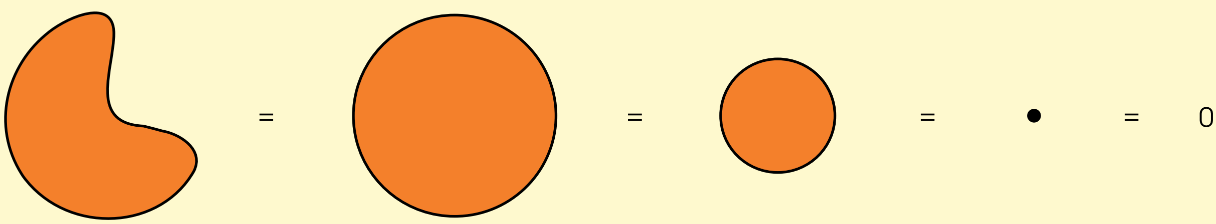

Figure I. Déformation d'un lacet.

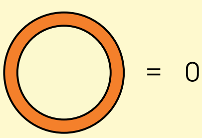

Figure II. Annihilation de deux lacets.

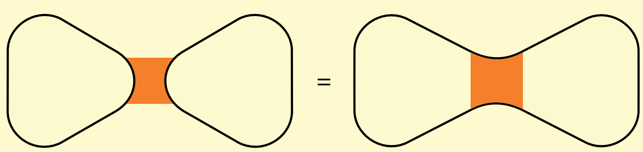

Figure III. Fusion de deux lacets.

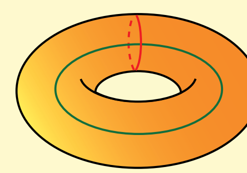

Figure IV. Les deux lacets d'un tore.

Pour y parvenir, dessinons sur la surface des courbes fermées continues, c'est-à-dire sans lever le crayon. Ces courbes sont appelées des lacets. Deux lacets sont équivalents si l'on peut déformer continûment l'un en l'autre. Dans ce contexte, un lacet continûment déformable en un point est considéré comme nul (fig. I). De même, la réunion de deux lacets voisins qui forment le bord d'un anneau est équivalente au lacet nul (fig. II). Enfin, on s'autorise à fusionner localement deux lacets voisins s'ils sont joignables par une surface sans trou (fig. III), c'est-à-dire que la réunion de ces lacets est équivalente à un seul lacet. Si une surface n'est pas trouée, comme un plan ou une sphère, tous les lacets tracés dessus peuvent être réduits à un point. Une surface sans trou n'a donc que des lacets nuls. Une surface sans bord avec un seul trou est continûment déformable en un tore (fig. IV). Elle possède alors deux lacets non nuls et non équivalents : l'un représenté par un méridien (le lacet rouge qui passe dans le trou) et l'autre représenté par une longitude (le lacet vert qui tourne autour du trou). On constate donc qu'à un trou correspondent deux lacets qui se coupent en un seul point. Plus généralement, le nombre de trous d'une surface sans bord est défini comme la moitié du nombre de lacets non nuls et non équivalents que l'on peut tracer dessus. Les mathématiciens ont baptisé ce nombre entier le genre de la surface. L'intérêt de ce nombre est qu'il est indépendant de la géométrie exacte de la surface et du point de vue de l'observateur. Pour cette raison, le genre d'une surface est un invariant topologique.

Parmi les six réponses proposées en début d'article, seule la cinquième est également un invariant topologique. Mais il s'agit du nombre de morceaux de l'extérieur du cube et non du nombre de trous du cube. Cet invariant ne permet pas de distinguer un cube percé d'un cube non percé puisqu'il vaut 1 dans les deux cas.