

Formes mathématiques

Des dés de dupe

Dans un jeu de hasard, on ne peut pas gagner à tous les coups, sinon il n'y aurait plus de hasard ! Mais si l'on dispose d'une information que les autres joueurs n'ont pas, on peut alors assurer ses gains avec une forte probabilité, pourvu que l'on joue assez longtemps. Sur un exemple de jeu de dés, nous allons voir que les jeux de hasard sont en fait un impôt sur l'ignorance.

PAR **ROMAIN ATTAL**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Voici quatre dés : un jaune, un rouge, un vert et un bleu. Choisissez-en un. J'en choisis un autre puis nous lançons nos dés en même temps. Celui qui obtient le plus grand numéro marque un point. Si nous lançons nos dés un grand nombre de fois, vous aurez la désagréable impression que j'ai choisi un dé « plus fort » que le vôtre. Je vous propose alors d'en choisir un autre parmi les quatre. J'en choisis un autre également, puis nous recommençons à jouer. À nouveau, je marque plus de points que vous en moyenne, quel que soit le dé



© Palais de la découverte /
B. Bureau.

que vous choisissiez ! Ces dés sont-ils pipés ? Non, car chaque face a bien une chance sur six d'apparaître. Ai-je triché ? Non, car j'ai bien suivi les règles énoncées.

UN PEU DE CALCUL

Regardons ces dés de plus près (fig. 1). Ils ne portent pas les numéros de 1 à 6, comme des dés standard. Si vous choisissez le dé jaune, je prends le dé bleu. Dans trois cas sur six, j'obtiens un 5 et je gagne contre vous puisque vous ne pouvez pas faire plus que 4. Et dans les trois autres cas, j'obtiens un 1 et j'ai encore deux chances sur six pour que vous obteniez un 0 et que vous perdiez donc à nouveau. Je gagne ainsi dans deux cas sur trois, puisque $3/6 + (3/6 \times 2/6) = 1/2 + 1/6 = 2/3$.

Si vous choisissez le dé rouge, je prends le dé jaune. Vous ne pouvez obtenir que des 3 et j'ai quatre chances sur six de vous battre, en obtenant un 4. Je gagne donc avec une probabilité de $4/6 = 2/3$.

Si vous optez pour le dé vert, je prends le rouge. Dans quatre cas sur six, vous obtenez un 2 et je vous bats puisque je ne peux obtenir que des 3. Dans les deux autres cas, vous obtenez un 6 et je perds. Mais je gagne encore dans deux cas sur trois.

Enfin, si vous jetez votre dévolu sur le dé bleu, je prends le vert. Dans deux cas sur six, j'obtiens un 6 et je vous bats puisque vous obtenez 5 au maximum. Si j'obtiens un 2, ce qui arrive dans quatre cas sur six, j'ai encore une chance sur deux pour que vous obteniez un 1 et que je vous batte. La probabilité pour que je gagne vaut donc $2/6 + (4/6 \times 1/2) = 1/3 + (2/3 \times 1/2) = 2/3$.

Ainsi, quel que soit le dé que vous prenez, je peux toujours choisir un autre dé « plus fort » que le vôtre et gagner dans deux cas sur trois. Il me suffit de savoir que le jaune gagne sur le rouge, qui gagne sur le vert, qui gagne sur le bleu, qui gagne sur le jaune, comme le suggère l'empilement de crayons de couleur de la figure 2.

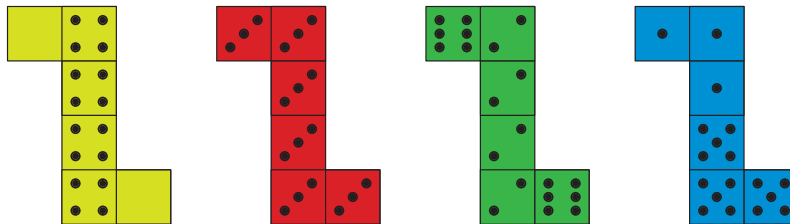


Figure 1. Les patrons de nos quatre dés. © Palais de la découverte / R. Attal.

Figure 2. Si le crayon de couleur X s'appuie sur celui de couleur Y, alors le dé de couleur X est « plus fort » que celui de couleur Y.

© Palais de la découverte / C. Judei.



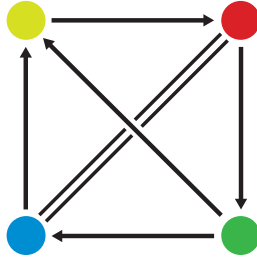


Figure 3. La relation « est plus fort que » entre nos quatre dés. © Palais de la découverte / R. Attal.

Figure 4. La relation « est plus fort que » est transitive sur les dés vert, bleu et jaune. © Palais de la découverte / C. Judei.



Figure 5. La relation « est plus fort que » n'est pas transitive sur les dés jaune, rouge et vert. © Palais de la découverte / C. Judei.



DE L'ORDRE DANS LE HASARD

Si le dé jaune joue contre le dé vert, alors ce dernier donne un 6 dans deux cas sur six et il gagne, ou bien il donne un 2 dans quatre cas sur six, auquel cas le dé jaune a encore deux chances sur six d'obtenir un 0 et de perdre. Le dé vert gagne donc contre le dé jaune avec une probabilité de $\frac{2}{6} + (\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}) = \frac{5}{9}$, ce qui correspond à un peu plus de 55 % des cas. Les dés jaune, rouge et vert forment ainsi un triplet « paradoxal » (le jaune est plus fort que le rouge, qui est plus fort que le vert, qui est plus fort que le jaune), mais l'avantage pour le joueur informé est moins grand qu'avec les quatre dés, grâce auxquels il peut gagner dans deux cas sur trois en moyenne, soit plus de 66 % des cas. En revanche, puisque le dé bleu donne un 1 dans trois cas sur six et un 5 dans les trois autres cas, il gagne une fois sur deux, en moyenne, contre le dé rouge. Ces deux dés sont donc aussi forts l'un que l'autre.

Nous pouvons résumer la relation « est plus fort que » par le schéma de la figure 3, où la couleur située au talon d'une flèche est plus forte que celle située à la pointe, et un double trait entre deux couleurs signifie qu'elles sont aussi fortes l'une que l'autre.

Sur le triplet vert-bleu-jaune (VBJ), la relation « est plus fort que » est dite transitive car V est plus fort que B, B est plus fort que J et V est plus fort que J (fig. 4), comme pour une relation d'ordre entre trois nombres x , y et z : si $x > y$ et $y > z$ alors $x > z$.

En revanche, sur le triplet jaune-rouge-vert (fig. 5), la relation « est plus fort que » n'est pas transitive : J est plus fort que R et R est plus fort que V, mais J est plus faible que V.

Si mon adversaire ignore ces relations entre les dés, il croit a priori que le jeu est équitable. En fait, il ne l'est pas car je dispose d'une information qu'il n'a pas et qui porte sur les probabilités de gain de chaque dé par rapport à chaque autre. Dans un jeu de hasard à deux joueurs, celui qui dispose de plus d'informations que son adversaire a non seulement la possibilité d'élaborer une stratégie gagnante (en laissant ici le choix du dé à son adversaire naïf) mais aussi un capital qui croît exponentiellement par rapport à celui de son adversaire. C'est pourquoi on peut considérer les jeux de hasard comme des formes d'impôt sur l'ignorance. On peut aussi utiliser d'autres numéros. Par exemple, les trois dés $X = (222555)$, $Y = (144444)$ et $Z = (333336)$ forment un triplet non transitif : X est plus fort que Y, Y est plus fort que Z et Z est plus fort que X. Mais ce triplet a une autre propriété surprenante : si on laisse l'adversaire choisir en premier et si on lance deux fois le dé au lieu d'une, en comparant les sommes des numéros des dés de chaque couleur, alors l'ordre est inversé ! En fait $2X$ sont plus forts que $2Z$, $2Z$ sont plus forts que $2Y$ et $2Y$ sont plus forts que $2X$. Étonnant, non ? R. A.

Pour en savoir plus

<http://singingbanana.com/dice/article.htm>

Pour aller plus loin

D'autres cas de non-transitivité

Ce système de dés non transitifs est relié à un problème posé par le scrutin majoritaire et connu depuis le XVIII^e siècle sous le nom de « paradoxe de Condorcet ».

Pour illustrer ce problème, imaginons la situation suivante. La princesse Lætitia de Poldévie doit choisir un époux parmi trois prétendants : Arthur d'Angleterre, qui est le plus amusant, Barnabé de Belgique, qui est le plus beau, et Carlos de Castille, qui est le plus courageux. Elle décide de les classer en attribuant à chacun d'eux une note de 1, 2 ou 3 pour chaque critère, puis en décrétant que « X est un meilleur parti que Y » si X a au

moins deux notes supérieures à celles de Y pour deux critères différents. Lætitia obtient alors le tableau I.

Arthur est plus amusant et plus courageux que Barnabé donc Arthur est un meilleur parti que Barnabé. Carlos est plus courageux et plus beau qu'Arthur. Carlos est donc un meilleur parti qu'Arthur. Mais Barnabé est plus beau et plus amusant que Carlos. Barnabé est donc un meilleur parti que Carlos. La princesse Lætitia de Poldévie ne peut sortir de ce dilemme propre à sa classification... qu'en épousant les trois !

La non-transitivité de nos quatre dés (inventés par le statisticien américain Bradley Efron) est analogue à celle d'un scrutin majoritaire entre trois candidats (ou plus) que l'on souhaite classer selon trois critères (ou plus). L'impossibilité de départager des candidats avec cette méthode découle du fait que la relation « est préférable à » n'est généralement pas transitive.

Le paradoxe de Condorcet s'est manifesté aux élections sénatoriales de 1970 dans l'état de New York. D'après certains sondages, Charles E. Goodell aurait été élu au second tour dans tout face à face (tableau II). Pourtant, il fut battu par ses deux adversaires : il n'obtint que 24 % des voix contre 39 % à James R. Buckley et 37 % à Richard L. Ottinger. Ainsi, le fait qu'un candidat X soit préféré à Y lors d'un face à face XY et à Z lors d'un face à face XZ n'implique pas que X sorte gagnant d'une triangulaire XYZ. Et inversement, un perdant dans chaque face à face peut remporter une triangulaire.

	Arthur	Barnabé	Carlos
Amusant	3	2	1
Beau	1	3	2
Courageux	2	1	3

Tableau I. Le dilemme de la princesse Lætitia de Poldévie.

	Buckley	Goodell	Ottinger
Buckley	-	39 %	49 %
Goodell	61 %	-	63 %
Ottinger	51 %	37 %	-

Tableau II. Résultats probables du second tour aux élections sénatoriales de 1970 dans l'état de New York. D'après ce sondage, un face à face Buckley/Goodell aurait donné 39 % des voix pour Buckley et 61 % pour Goodell.