conférences
éducation
évènements

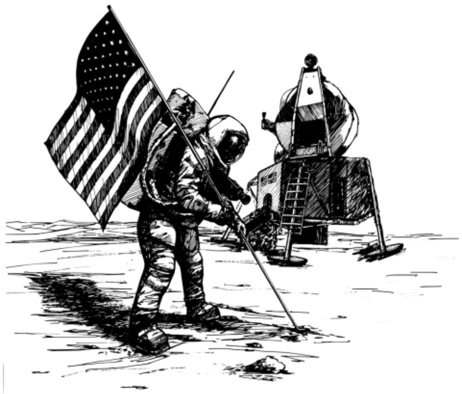
la médiation scientifique

ateliers
exposés
animations
formation

DESTINATION LUNE

Liens avec les programmes scolaires
Proposition d'exercices pour les élèves et correction

Professeur(e) de lycée



Département éducation – formation
Cité des sciences et de l'industrie
30 avenue Corentin-Cariou
75019 Paris
www.cite-sciences.fr

2015

Sommaire

I Liens avec les programmes scolaires

Classe de 2de

SVT

La Terre est une planète du système solaire.
Le Soleil est une étoile autour de laquelle tournent différents objets (planètes, astéroïdes, comètes). Ils sont de tailles, compositions chimiques et activités internes variées.
L'énergie solaire reçue par les planètes varie en fonction de la distance au Soleil.
Comparaison des planètes. Étude d'images et de données de sondes spatiales. Documents de planétologie comparée. Mise en évidence d'une activité interne (ou de son absence) à partir de l'observation de leurs surfaces (appareils volcaniques, figures tectoniques et leur chronologie relative etc.)

Sciences physiques

Présentation de l'Univers, de l'atome aux galaxies.
Échelles de longueur. Échelle des distances dans l'Univers. Unités de longueur.
Comment mesurer la distance de la Terre à la Lune ? Technique de l'écho laser.
Relativité du mouvement.
La gravitation universelle. Comparaison du poids d'un même corps sur la Terre et sur la Lune. Interprétation du mouvement de la Lune (ou d'un satellite) par extrapolation du mouvement d'un projectile. Pourquoi la Lune ne « tombe-t-elle pas » sur la Terre ?
Le temps. Alternance des jours et des nuits, des phases de la Lune, des saisons.
Sur quel principe repose la construction d'un calendrier ?

Classe de 1re S

Sciences physiques

Les interactions fondamentales : la gravitation. Interactions et cohésion de la matière à l'échelle astronomique.
Forces et mouvements : une approche des lois de Newton. Référentiel galiléen.
Modélisation expérimentale d'un instrument d'optique simple : lunette astronomique…
Exemple d'activité : étude documentaire sur le télescope de Newton.

Classe de Terminale S

Sciences physiques

Transformations nucléaires. Exemple d’activité : la fusion et les étoiles.
La mécanique de Newton.
Étude de cas : satellites et planètes.
Lois de Kepler (trajectoire circulaire ou elliptique).
Référentiel héliocentrique ou géocentrique.
Étude d’un mouvement circulaire et uniforme ; vitesse, vecteur accélération ; accélération normale.
Énoncé de la loi de la gravitation universelle pour des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique et la distance grande devant leur taille.
Application de la deuxième loi de Newton au centre d’inertie d’un satellite ou d’une planète : force centripète, accélération radiale, modélisation du mouvement des centres d’inertie des satellites et des planètes par un mouvement circulaire et uniforme, applications (période de révolution, vitesse, altitude, satellite géostationnaire).
Évolution temporelle des systèmes et la mesure du temps. Mouvement des astres, rotation de la Terre. Mesure de la célérité de la lumière.

Enseignement de spécialité

Lunette astronomique : objectif, oculaire.
Télescope de Newton : miroir sphérique, miroir plan, objectif.
Modélisation de la lunette astronomique par un système afocal de deux lentilles minces et modélisation du télescope de Newton par un système de miroirs, lentille mince.
Construction graphique de l’image intermédiaire et de l’image définitive d’un objet plan perpendiculaire à l’axe optique.
Caractéristiques de l’image intermédiaire et de l’image définitive par construction et/ou par application des formules de conjugaison.
Diamètre apparent. Grossissement standard. Cercle oculaire.

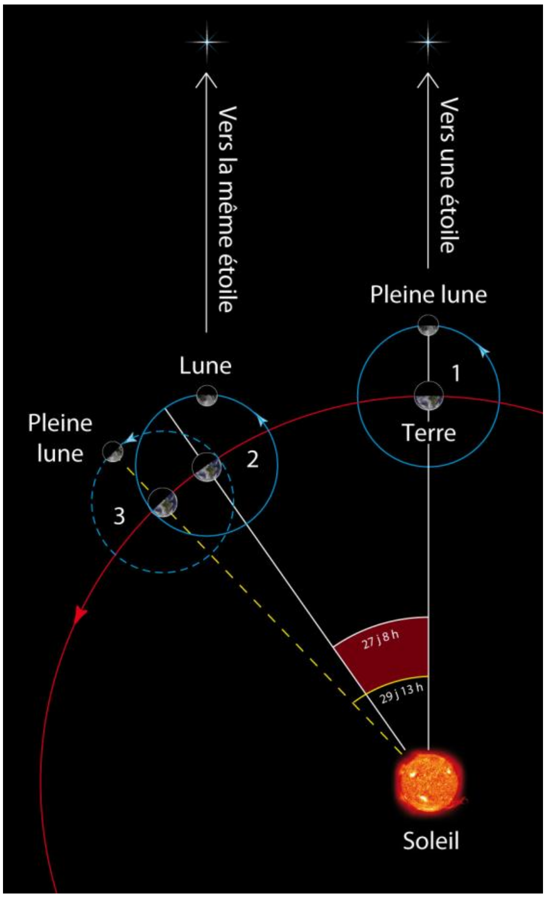
Philosophie

Le savoir. Les sciences de la nature et les sciences de l’homme.
La maîtrise de la nature. La révolution galiléenne : cosmos et univers.

II Proposition d'exercices pour les élèves

II.1 Calcul de la période synodique à partir de la période sidérale

La situation va sans doute vous rappeler le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par le philosophe grec présocratique Zénon d'Élée au V^e siècle avant notre ère.



1. La Terre tourne autour du Soleil en un an environ, soit une période T_T = 365,256363004 jours. On suppose que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire. **De quel angle se déplace-t-elle en une journée ?** Vous exprimerez cette vitesse angulaire ω_T en degré par jour.

2. La Lune tourne autour de la Terre en une période sidérale, soit T_L = 27 j 7 h 43 min 12 s. On suppose que la trajectoire de la Lune autour de la Terre est circulaire. **Exprimez cette période sous forme décimale, c'est-à-dire 27,… j**. **De quel angle se déplace-t-elle en une journée ?** Vous exprimerez cette vitesse angulaire ω_L en degré par jour.

Nous débutons notre expérience lors d'une pleine lune et tentons, par le calcul, de prévoir quand aura lieu la pleine lune suivante. Autrement dit, nous allons calculer le temps nécessaire à la Lune pour effectuer un cycle complet de phases, c'est-à-dire une lunaison. Cet intervalle de temps s'appelle la période synodique de la Lune. Repérons la Lune par rapport à une étoile lointaine…

3. Une période sidérale T_L plus tard, la Lune est revenue dans la même position par rapport à l'étoile. **La Lune est-elle pleine ? Pourquoi ?**

4. Pendant cette période sidérale T_L, la Terre a donc avancé d'un certain angle Ω_1 sur son orbite. **Établissez l'expression littérale puis calculez numériquement cet angle** Ω_1, proche de 27°.

5. **Donner littéralement puis numériquement le temps T_1 qu'il faut à la Lune pour parcourir cet angle Ω_1.**

6. Depuis le début de notre expérience, il s'est donc écoulé $T_L + T_1$. **La Lune est-elle enfin pleine ? Pourquoi ?**

7. Ainsi, pendant ce temps T_1, proche de deux jours, la Terre a avancé d'un certain angle Ω_2 sur son orbite. **Établissez l'expression littérale puis calculez numériquement cet angle** Ω_2, proche de 2°.

8. **Donner littéralement puis numériquement le temps T_2 qu'il faut à la Lune pour parcourir cet angle Ω_2.**

9. Depuis le début de notre expérience, il s'est donc écoulé $T_L + T_1 + T_2$. **La Lune est-elle enfin pleine ? Pourquoi ?**

10. Pendant ce temps T_2, proche de 3 h 40 min, la Terre a avancé d'un certain angle Ω_3 sur son orbite. **Établissez l'expression littérale puis calculez numériquement cet angle** Ω_3, proche de 9', soit 0,151°.

11. **Donner littéralement puis numériquement le temps T_3 qu'il faut à la Lune pour parcourir cet angle Ω_3.**

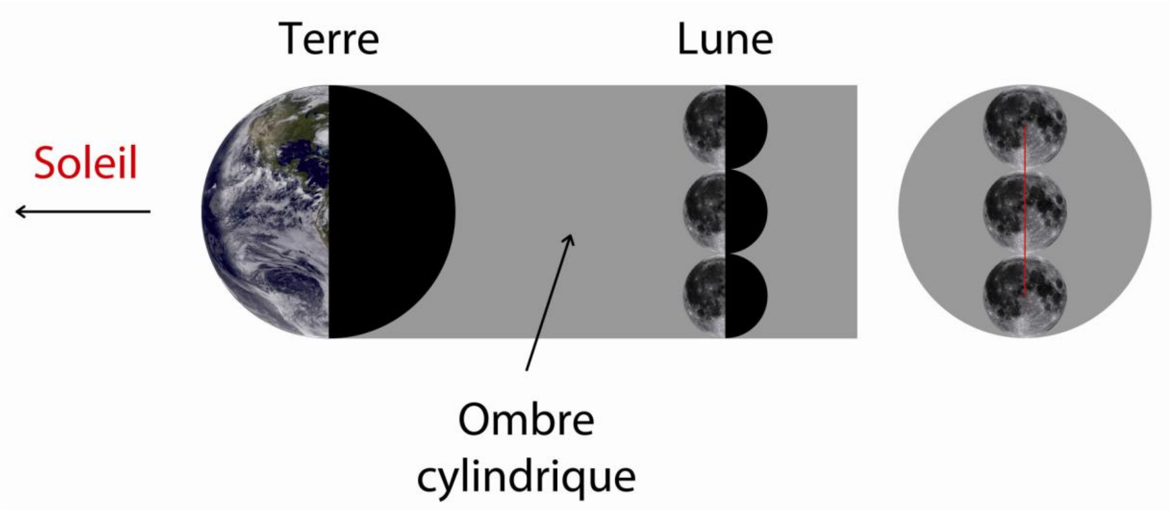
Faisons une pause. Depuis le début de notre expérience, il s'est écoulé $T_L + T_1 + T_2 + T_3$, soit un peu plus de 29 jours et 12 heures. Un schéma commence à se dégager de vos calculs… vous avez bien sûr reconnu la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{\omega_T}{\omega_L}$ et de premier terme T_L. Comme vous connaissez votre cours de mathématiques sur le bout des doigts, vous savez que cette série converge parce que la raison q est strictement inférieure à 1. Sa limite vaut $\frac{T_L}{1-q} = \frac{T_L}{1-\frac{\omega_T}{\omega_L}}$.

12. **Que vaut numériquement cette limite ?**

Voilà, vous venez de calculer le temps moyen que dure un cycle complet des phases de la Lune, c'est-à-dire la période synodique de la Lune. Bravo ! La valeur exacte est 29 h 12 h 44 min 2,9 s.

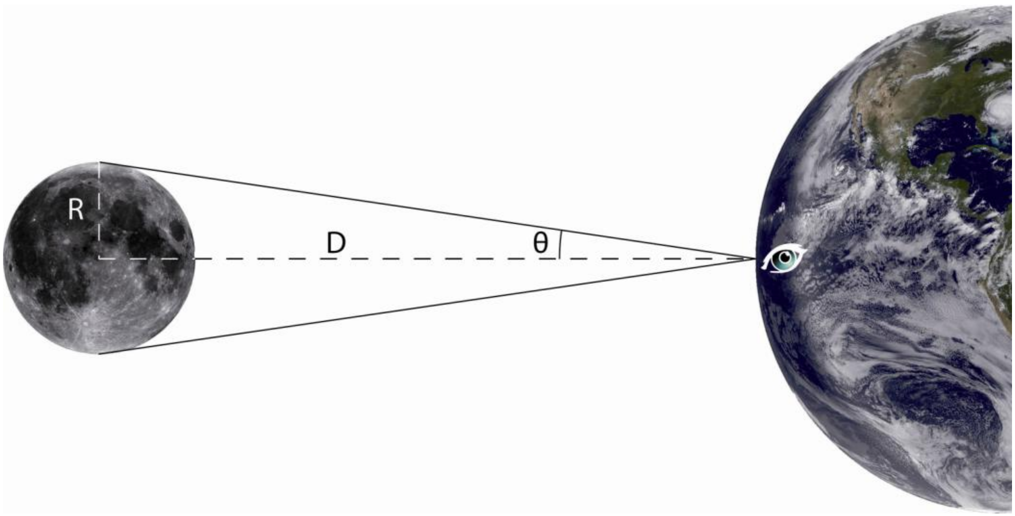
II.2 Calcul de la distance Terre – Lune

On se propose ici de calculer la distance Terre – Lune selon une méthode inspirée de celle proposée par l'astronome grec Aristarque de Samos (vers 310 av. J.-C. – vers 230 av. J.-C.) dans son ouvrage *Sur les grandeurs et les distances (du Soleil et de la Lune)*.



1. On fait l'hypothèse que l'ombre engendrée par la Terre dans la direction opposée au Soleil est cylindrique. **Cette hypothèse est-elle valable ? Sinon, quelle est la véritable forme de l'ombre ?**

2. L'observation montre que la Lune se déplace d'une distance égale à son diamètre en une heure et que les éclipses totales de Lune les plus longues durent près de 2 heures. **Pouvez-vous en déduire le rapport numérique entre le diamètre lunaire et le diamètre terrestre ?** La valeur admise aujourd'hui est 0,272. La valeur que vous venez de calculer (comprise entre 0,3 et 0,4) n'en est donc pas trop éloignée.



3. La Lune est vue sous un diamètre d'environ 31,5', soit $\frac{31{,}5}{60} = 0{,}525°$. On se propose ici de calculer la distance à laquelle il faut se trouver d'un objet pour le voir sous un angle de 0,525°, en fonction de la taille de cet objet.

   a. R est le rayon de la Lune, D la distance entre l'observateur terrestre et la Lune et θ l'angle sous lequel on voit la Lune depuis la Terre. **Quelle relation trigonométrique relie ces trois grandeurs ?**

   b. L'angle θ, on l'a vu, est assez petit. Pour les petits angles, on peut assimiler la tangente de l'angle à l'angle lui-même. **Que devient alors la relation déterminée plus haut ?**

   c. Attention, dans cette relation, l'angle est exprimé radian ! **Pouvez-vous donc exprimer 0,525° en radian ?** Rappel **:** 1 radian = 180/π degrés ≈ 57,3°. N'oubliez pas ensuite de **diviser** le résultat par **deux** pour tenir compte du fait que l'angle θ est l'angle sous lequel on voit le **rayon** de la Lune, et pas son diamètre !

   d. Enfin, à partir des réponses apportées aux questions **b** et **c**, **exprimez la distance à laquelle il faut se trouver de la Lune pour la voir sous un angle de 0,525° en fonction de son diamètre** (ou, ce qui revient au même, pour voir, en fonction de son rayon, ce même rayon sous un angle de 0,2625°).

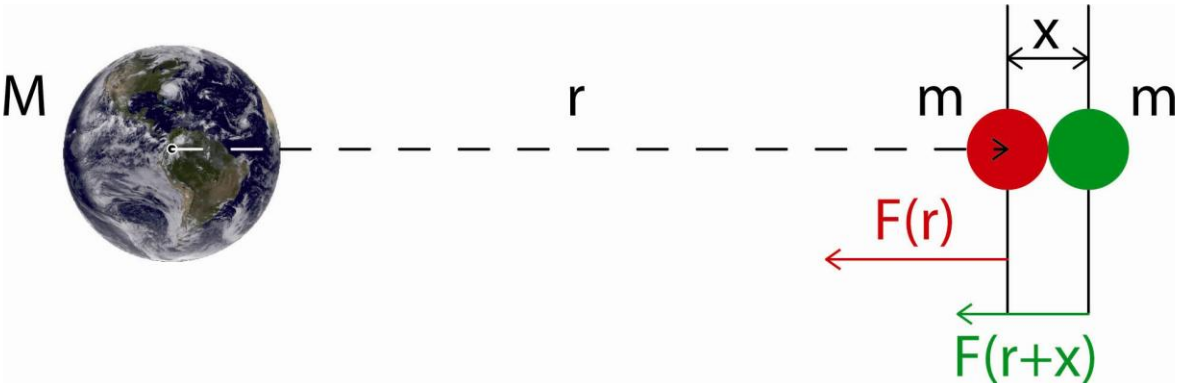
4. Nous connaissons donc maintenant la distance Terre – Lune D en fonction du rayon R de la Lune. Grâce à la question **2**, nous avons estimé la taille de la Lune en fonction de celle de la Terre. Voilà qui nous permet de déterminer la distance Terre – Lune en fonction du rayon terrestre ! **Pouvez-vous effecteur ce calcul ?**

5. La distance réelle Terre-Lune est proche de 60 rayons terrestres. La méthode que nous venons d'appliquer mène à une distance égale à près de 73 rayons terrestres, soit 464 000 km. Au vu de nos hypothèses, le résultat est très satisfaisant. **Que pourrait-on changer à ces hypothèses pour améliorer la précision du résultat ?**

Les Grecs connaissaient ainsi la rotondité de la Terre, sa taille et la distance Terre – Lune. Ils se sont également attaqués à la distance Terre – Soleil, qu'ils ont estimée à 19 fois la distance Terre – Lune, soit une erreur… d'un facteur 20, puisque le Soleil est 390 fois plus éloigné que la Lune ! Il faudra attendre le XVII^{e} siècle pour que cette valeur soit corrigée.

II.3 Effets de marée et dislocation de la Lune

Soient deux sphères indéformables de rayon $\frac{x}{2}$ et de masse *m*, en contact (leurs centres sont donc séparés de la distance *x*), orbitant autour d'une planète de masse *M*.



1. **Calculez l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}_g$ entre les deux petites sphères**.

2. **Calculez l'intensité de la force exercée par la planète sur chacune des sphères, $\vec{F}_r$ et $\vec{F}_{r+x}$. Calculez ensuite la différence entre ces deux intensités**. Mettez $\frac{1}{r^2}$ en facteur au dénominateur et vous devriez obtenir une expression du type $F_r - F_{r+x} = cte \times (1-(1+\frac{x}{r})^{-2})$. On montre que, lorsque *y* est tout petit devant 1, alors $(1+ny)^{-2}$ est très peu différent de 1 – 2ny. En supposant que *x* est bien plus petit que *r* (x<<r), **donnez une expression simplifiée de** $F_r - F_{r+x}$.

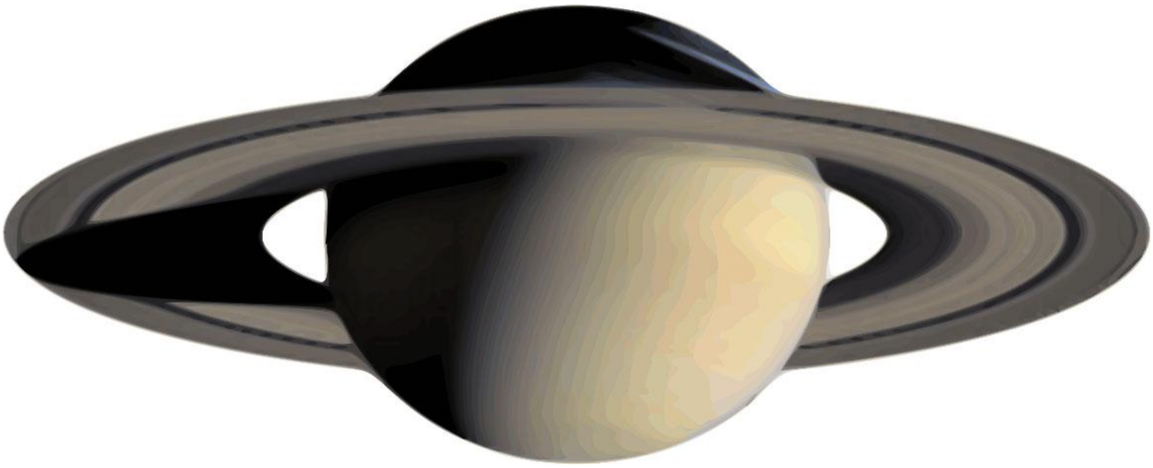
3. À la distance appelée *limite de Roche* (du nom de l'astronome français Edouard Roche au XIX^{e} siècle), les deux petites sphères se détacheraient sous l'effet des forces de marée imprimées par la planète. À cette limite *d*, on a $F_r - F_{r+x} = F_g$. **Exprimez cette relation en fonction des paramètres du problème.**

4. Sachant que la masse est égale au produit de la masse volumique par le volume, on a $M = \rho_{planète} V_{planète} = \rho_{planète} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3_{planète}$ et $m = \rho_{sphère} V_{sphère} = \rho_{sphère} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3_{sphère}$.

5. **En déduire cette distance *d*** en fonction de $R_{planète}$, $\rho_{planète}$ et $\rho_{sphère}$. Rappel : $R_{sphère} = \frac{x}{2}$.

6. Dans le cas d'un satellite fluide et donc déformable, dont la cohésion ne serait maintenue que par les seules forces de gravitation internes, on montre que la distance en deçà de laquelle il se disloquerait vaut $d = 2{,}423 \cdot R_{planète}(\frac{\rho_{planète}}{\rho_{sphère}})^{\frac{1}{3}}$. En appliquant cette formule au système Terre - Lune, **calculez jusqu'à quelle distance la Lune pourrait s'approcher sans danger de la Terre.** R_{Terre} = 6 378 km, ρ_{Terre} = 5 515 kg.m^{-3}, ρ_{Lune} = 3 344 kg.m^{-3}.

On peut imaginer que si la Lune franchissait la limite de Roche, elle se disloquerait et les débris formeraient un anneau autour de la Terre. Quel spectacle extraordinaire ce serait ! Mais nous ne serions peut-être plus là pour l'admirer…



II.4 Détermination de la structure interne de la Lune

Essayons de déterminer grossièrement la structure interne de notre satellite.

1. **Calculez d'abord sa masse volumique moyenne ρ.** Rappel : le volume d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
2. **En déduire sa densité par rapport à l'eau**. Rappel : la masse volumique de l'eau liquide vaut 1 000 kg.m^{-3} sous une atmosphère, à 4 °C. On prendra cette valeur pour le calcul.

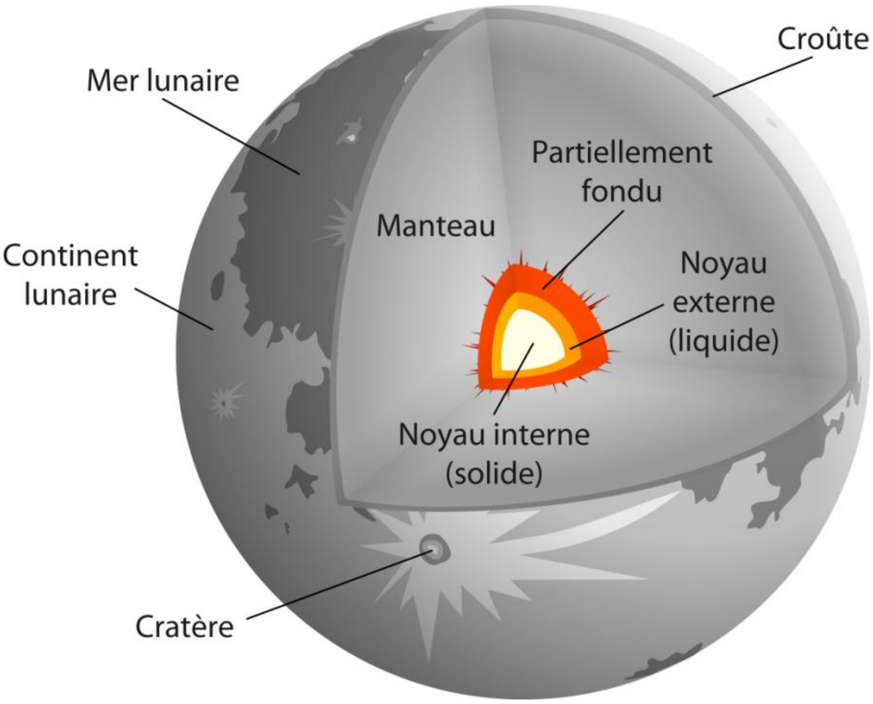
On peut ainsi imaginer que la Lune se compose de :

- un noyau dense, riche en fer (d = 10, soit ρ_{noyau} = 10 000 kg.m^{-3}) de rayon *x* ;
- un manteau de roches silicatées (d = 3, soit $\rho_{manteau}$ = 3 000 kg.m^{-3}), entourant le noyau. Ce manteau possède une épaisseur $R_{Lune} - x$.

3. En écrivant que la masse totale de la Lune est égale à la masse de son noyau augmentée de la masse de son manteau, **déterminez le rayon *x* du noyau.** Rappel : le masse M d'un corps de masse volumique ρ et de volume V est $M = \rho V$.

4. **Comment pourrait-on améliorer notre modèle, ici simpliste ?**

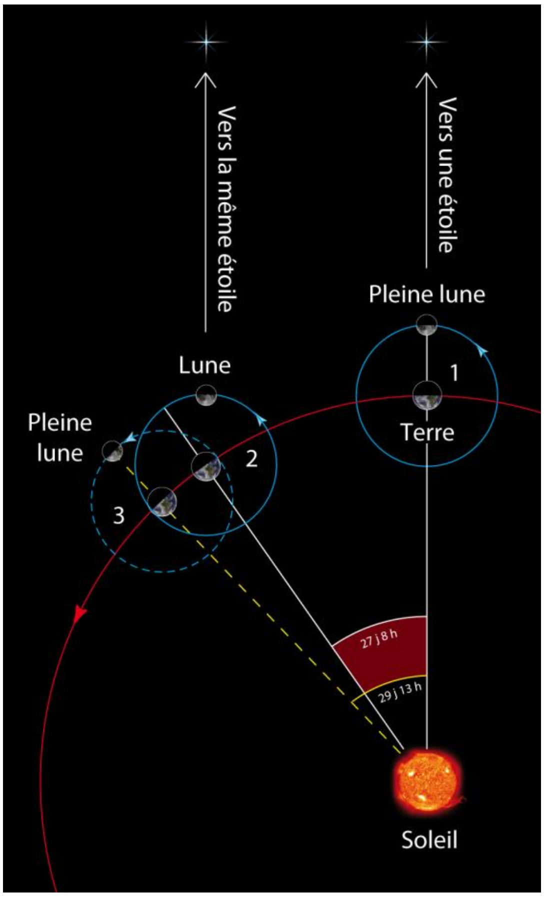
<u>Données :</u> R_{Lune} = 1 737 km et M_{Lune} = 7,348.10^{22} kg



Un modèle de structure interne de la Lune.

III Correction

III.1 Calcul de la période synodique à partir de la période sidérale



1. La Terre tourne autour du Soleil en un an environ, soit une période T_T = 365,256363004 jours. On suppose que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire. **De quel angle se déplace-t-elle en une journée ?** Vous exprimerez cette vitesse angulaire ω_T en degré par jour.

$$\omega_T = \frac{360}{365,256363004} = 0,98561° / \text{jour}$$

2. La Lune tourne autour de la Terre en une période sidérale, soit T_L = 27 j 7 h 43 min 12 s. On suppose que la trajectoire de la Lune autour de la Terre est circulaire. **Exprimez cette période sous forme décimale, c'est-à-dire 27,… j. De quel angle se déplace-t-elle en une journée ?** Vous exprimerez cette vitesse angulaire ω_L en degré par jour.

T_L = 27,322 jours et ω_L = 13,176° / jour

Nous débutons notre expérience lors d'une pleine lune et tentons, par le calcul, de prévoir quand aura lieu la pleine lune suivante. Autrement dit, nous allons calculer le temps nécessaire à la Lune pour effectuer un cycle complet de phases, c'est-à-dire une lunaison. Cet intervalle de temps s'appelle la période synodique de la Lune. Repérons la Lune par rapport à une étoile lointaine…

3. Une période sidérale T_L plus tard, la Lune est revenue dans la même position par rapport à l'étoile. **La Lune est-elle pleine ? Pourquoi ?**

La Terre ayant effectué une petite portion de son orbite autour du Soleil, la Lune n'est pas encore pleine puisqu'elle ne se trouve pas dans la direction opposée au Soleil.

4. Pendant cette période sidérale T_L, la Terre a donc avancé d'un certain angle Ω_1 sur son orbite. **Établissez l'expression littérale puis calculez numériquement cet angle** Ω_1, proche de 27°.

$\Omega_1 = \omega_T \times T_L =$ 26,928° = 26° 55' 42,5''

5. **Donner littéralement puis numériquement le temps T_1 qu'il faut à la Lune pour parcourir cet angle** Ω_1**.**

$$T_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_L} = \frac{\omega_T}{\omega_L} \times T_L = 2{,}0437 \text{ jours} = 2 \text{ j } 1 \text{ h } 2 \text{ min } 55{,}5 \text{ s}$$

6. Depuis le début de notre expérience, il s'est donc écoulé $T_L + T_1$. **La Lune est-elle enfin pleine ? Pourquoi ?**

La Lune n'est toujours pas pleine car pendant ces deux jours environ, la Terre a avancé un peu sur son orbite. La Lune n'est toujours pas dans la direction opposée au Soleil.

7. Ainsi, pendant ce temps T_1, proche de deux jours, la Terre a avancé d'un certain angle Ω_2 sur son orbite. **Établissez l'expression littérale puis calculez numériquement cet angle** Ω_2, proche de 2°.

$$\Omega_2 = \omega_T \times T_1 = \frac{\omega_T^2}{\omega_L} \times T_L = 2{,}0143° = 2° \, 0' \, 51{,}4''$$

8. **Donner littéralement puis numériquement le temps T_2 qu'il faut à la Lune pour parcourir cet angle Ω_2.**

$$T_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_L} = \frac{\omega_T^2}{\omega_L^2} \times T_L = 0{,}1528713091419 \text{ j} = 3 \text{ h } 40 \text{ min } 8{,}1 \text{ s}$$

9. Depuis le début de notre expérience, il s'est donc écoulé $T_L + T_1 + T_2$. **La Lune est-elle enfin pleine ? Pourquoi ?**

La Lune n'est toujours pas pleine car pendant ces trois heures quarante minutes environ, la Terre a avancé un tout petit peu sur son orbite. La Lune n'est toujours pas dans la direction opposée au Soleil, mais elle refait son retard !

10. Pendant ce temps T_2, proche de 3 h 40 min, la Terre a avancé d'un certain angle Ω_3 sur son orbite. **Établissez l'expression littérale puis calculez numériquement cet angle** Ω_3, proche de 9', soit 0,151°.

$$\Omega_3 = \omega_T \times T_2 = \frac{\omega_T^3}{\omega_L^2} \times T_L = 0{,}15067° = 9'\ 2{,}42''$$

11. **Donner littéralement puis numériquement le temps T_3 qu'il faut à la Lune pour parcourir cet angle Ω_3.**

$$T_3 = \frac{\Omega_3}{\omega_L} = \frac{\omega_T^3}{\omega_L^3} \times T_L = 0{,}0114349793031\,\text{j} = 16\text{ min }27{,}98\text{ s}$$

Faisons une pause. Depuis le début de notre expérience, il s'est écoulé $T_L + T_1 + T_2 + T_3$, soit un peu plus de 29 jours et 12 heures. Un schéma commence à se dégager de vos calculs… vous avez bien sûr reconnu la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{\omega_T}{\omega_L}$ et de premier terme T_L. Comme vous connaissez votre cours de mathématiques sur le bout des doigts, vous savez que cette série converge parce que la raison q est strictement inférieure à 1. Sa limite vaut $\frac{T_L}{1-q} = \frac{T_L}{1-\frac{\omega_T}{\omega_L}}$.

12. **Que vaut numériquement cette limite ?**

$T_L + T_1 + T_2 + T_3 = 29{,}5296703278436$ j = 29 j 12 h 42 min 43,5 s

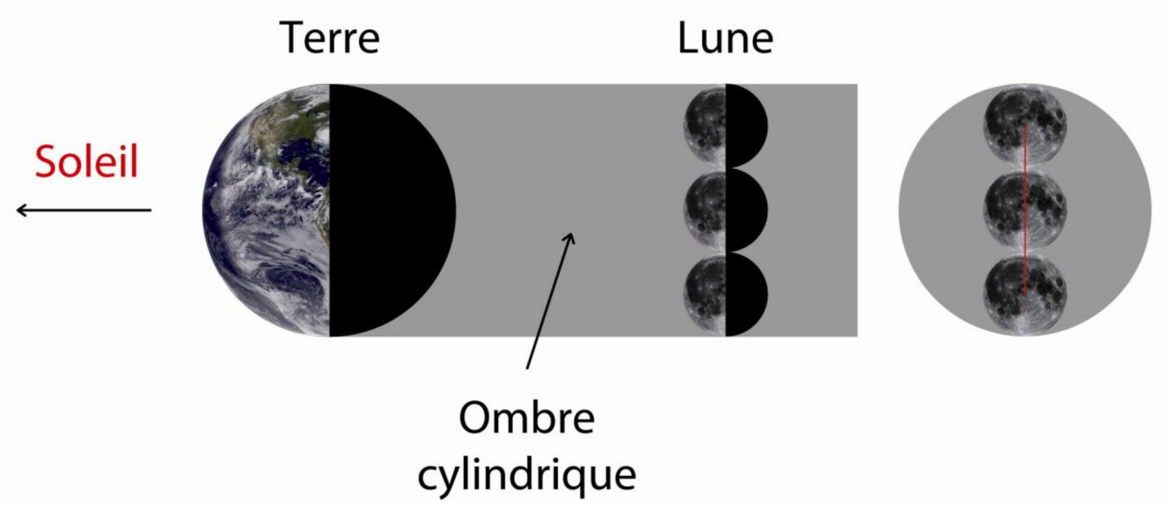
$$T = T_L + \frac{\omega_T}{\omega_L} \times T_L + \frac{\omega_T^2}{\omega_L^2} \times T_L + \frac{\omega_T^3}{\omega_L^3} \times T_L + \ldots + \frac{\omega_T^n}{\omega_L^n} \times T_L + \ldots = T_L \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_T}{\omega_L}\right)^n = \frac{T_L}{1-\frac{\omega_T}{\omega_L}}$$

$= 29{,}5305948339575\,\text{j}$ = 29 j 12 h 44 min 3,4 s.

Voilà, nous venons de calculer le temps moyen que dure un cycle complet des phases de la Lune, c'est-à-dire la période synodique de la Lune. La valeur exacte est 29 j 12 h 44 min 2,9 s. Avouez qu'une demi-seconde d'erreur sur un mois, ce n'est pas mal !

III.2 Calcul de la distance Terre – Lune selon Aristarque

On se propose ici de calculer la distance Terre – Lune selon une méthode inspirée de celle proposée par l'astronome grec Aristarque de Samos (vers 310 av. J.-C. – vers 230 av. J.-C.) dans son ouvrage *Sur les grandeurs et les distances (du Soleil et de la Lune)*.

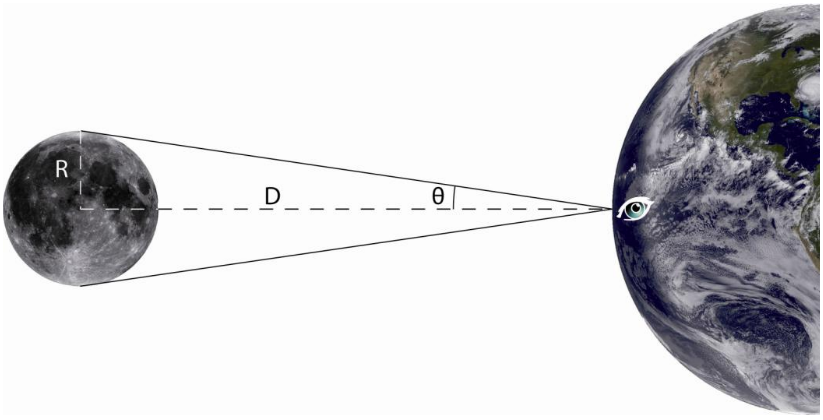


1. On fait l'hypothèse que l'ombre engendrée par la Terre dans la direction opposée au Soleil est cylindrique. **Cette hypothèse est-elle valable ? Sinon, quelle est la véritable forme de l'ombre ?**

En théorie, l'ombre de la Terre est un cône de révolution. On montre que le sommet du cône se trouve dans la direction opposée au Soleil, entre 221 et 231 rayons terrestres du centre de la Terre, en fonction de la distance Terre – Soleil.

2. L'observation montre que la Lune se déplace d'une distance égale à son diamètre en une heure et que les éclipses totales de Lune les plus longues durent près de 2 heures. **Pouvez-vous en déduire le rapport numérique entre le diamètre lunaire et le diamètre terrestre ?** La valeur admise aujourd'hui est 0,272. La valeur que vous venez de calculer (comprise entre 0,3 et 0,4) n'en est donc pas trop éloignée.

L'éclipse totale de Lune débute lorsque la Lune se trouve enfin entièrement dans l'ombre de la Terre. Si l'éclipse dure deux heures (durée maximale de la phase de totalité de l'éclipse), la Lune aura eu le temps de se déplacer d'une distance égale à deux fois son diamètre tout en restant dans l'ombre, juste avant d'en sortir. Un diamètre lunaire + deux diamètres lunaires = trois diamètre lunaires = diamètre de la Terre puisqu'on suppose l'ombre cylindrique. Le rapport entre le diamètre de la Lune et celui de la Terre se monte à un tiers, soit 0,333.



3. La Lune est vue sous un diamètre d'environ 31,5', soit $\frac{31,5}{60} = 0,525°$. On se propose ici de calculer la distance à laquelle il faut se trouver d'un objet pour le voir sous un angle de 0,525°, en fonction de la taille de cet objet.

a. R est le rayon de la Lune, D la distance entre l'observateur terrestre et la Lune et θ l'angle sous lequel on voit la Lune depuis la Terre. **Quelle relation trigonométrique relie ces trois grandeurs ?**

$\tan(\theta) = \frac{R}{D}$

b. L'angle θ, on l'a vu, est assez petit. Pour les petits angles, on peut assimiler la tangente de l'angle à l'angle lui-même. **Que devient alors la relation déterminée plus haut ?**

$\theta \approx \frac{R}{D}$

c. Attention, dans cette relation, l'angle est exprimé radian ! **Pouvez-vous donc exprimer 0,525° en radian ?** Rappel **:** 1 radian = 180/π degrés ≈ 57,3°. N'oubliez pas ensuite de **diviser** le résultat par **deux** pour tenir compte du fait que l'angle θ est l'angle sous lequel on voit le **rayon** de la Lune, et pas son diamètre !

$\theta = 0,5 \times 0,525° = 0,2625 \times \frac{\pi}{180} = 4,58.10^{-3}$ rad.

d. Enfin, à partir des réponses apportées aux questions **b** et **c**, **exprimez la distance à laquelle il faut se trouver de la Lune pour la voir sous un angle de 0,525° en fonction de son diamètre** (ou, ce qui revient au même, pour voir, en fonction de son rayon, ce même rayon sous un angle de 0,2625°).

On veut que $\frac{R}{D} = 4,58.10^{-3}$ d'où D ≈ 218,3. Pour voir la Lune sous un angle de 0,525°, il faut l'observer depuis une distance égale à 218,3 fois son rayon ou 109,1 fois son diamètre.

4. Nous connaissons donc maintenant la distance Terre – Lune D en fonction du rayon R de la Lune. Grâce à la question **2**, nous avons estimé la taille de la Lune en fonction de celle de la Terre. Voilà qui nous permet de déterminer la distance Terre – Lune en fonction du rayon terrestre ! **Pouvez-vous effecteur ce calcul ?**

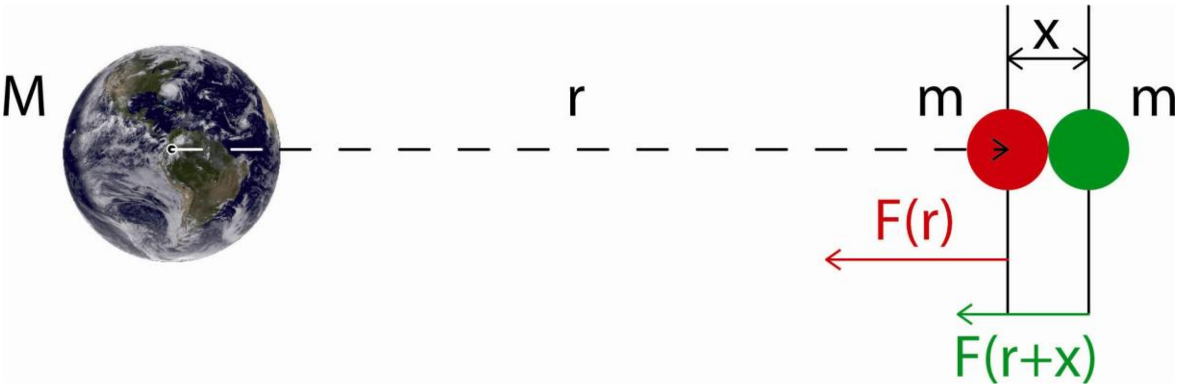
$218{,}3 \times \frac{1}{3} = 72{,}8$. Selon nos calculs, la distance Terre – Lune s'élève à 72,8 rayons terrestres.

5. La distance moyenne réelle Terre-Lune est proche de 60,3 rayons terrestres. La méthode que nous venons d'appliquer mène à une distance égale à près de 73 rayons terrestres, soit 464 000 km. Au vu de nos hypothèses, le résultat est très satisfaisant. **Que pourrait-on changer à ces hypothèses pour améliorer la précision du résultat ?**

Prendre en compte le fait que l'ombre de la Terre n'est pas cylindrique mais conique, améliorer la précision sur la durée maximale d'une éclipse totale de Lune…

III.3 Effets de marée et dislocation de la Lune

Soient deux sphères indéformables de rayon $\frac{x}{2}$ et de masse *m*, en contact (leurs centres sont donc séparés de la distance *x*), orbitant autour d'une planète de masse *M*.



1. **Calculez l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}_g$ entre les deux petites sphères.**

$$F_g = \frac{Gm^2}{x^2}$$

2. **Calculez l'intensité de la force exercée par la planète sur chacune des sphères, $\vec{F}_r$ et $\vec{F}_{r+x}$.**

$$F_r = \frac{GMm}{r^2} \text{ et } F_{r+x} = \frac{GMm}{(r+x)^2}$$

3. **Calculez ensuite la différence entre ces deux intensités**. Mettez $\frac{1}{r^2}$ en facteur au dénominateur et vous devriez obtenir une expression du type $F_r - F_{r+x} = cte \times (1-(1+\frac{x}{r})^{-2})$.

On montre que, lorsque *y* est tout petit devant 1, alors $(1+ny)^{-2}$ est très peu différent de 1 – 2ny. En supposant que *x* est bien plus petit que *r* (x<<r), **donnez une expression simplifiée de** $F_r - F_{r+x}$.

$$F_r - F_{r+x} = \frac{GMm}{r^2} - \frac{GMm}{(r+x)^2} = GMm\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+x)^2}\right] = \frac{GMm}{r^2}\left[1 - \frac{1}{(1+\frac{x}{r})^2}\right]$$

$$= \frac{GMm}{r^2}\left[1-(1+\frac{x}{r})^{-2}\right] \approx \frac{GMm}{r^2}\left[1-(1-2\frac{x}{r})\right] = \frac{GMm}{r^2}(2\frac{x}{r}) = \frac{2GMmx}{r^3} \quad \text{Ouf !}$$

4. À la distance appelée *limite de Roche* (du nom de l'astronome français Edouard Roche au XIX[e] siècle), les deux petites sphères se détacheraient sous l'effet des forces de marée imprimées par la planète. À cette limite *d*, on a $F_r - F_{r+x} = F_g$. **Exprimez cette relation en fonction des paramètres du problème.**

À la limite de roche, on a $F_r - F_{r+x} = F_g$ c'est-à-dire $\frac{2GMmx}{r^3} = \frac{Gm^2}{x^2}$

Après simplification, il vient $r = \sqrt[3]{\frac{2M}{m}}x$

5. Sachant que la masse est égale au produit de la masse volumique par le volume, on a $M = \rho_{planète}V_{planète} = \rho_{planète} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3_{planète}$ et $m = \rho_{sphère}V_{sphère} = \rho_{sphère} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3_{sphère}$.

En déduire cette distance *d* en fonction de $R_{planète}$, $\rho_{planète}$ et $\rho_{sphère}$. Rappel : $R_{sphère} = \frac{x}{2}$.

On a donc ici $d = \sqrt[3]{\frac{2\rho_{planète}V_{planète}}{\rho_{sphère}V_{sphère}}}x = \sqrt[3]{\frac{2\rho_{planète}\frac{4}{3}\pi R^3_{planète}}{\rho_{sphère}\frac{4}{3}\pi R^3_{sphère}}}x$, avec $R_{sphère} = \frac{x}{2}$

Après simplification, on obtient $d = R_{planète}\sqrt[3]{16\frac{\rho_{planète}}{\rho_{sphère}}} \approx 2,520 R_{planète}\sqrt[3]{\frac{\rho_{planète}}{\rho_{sphère}}}$

6. Dans le cas d'un satellite fluide et donc déformable, dont la cohésion ne serait maintenue que par les seules forces de gravitation internes, on montre que la distance en deçà de laquelle il se disloquerait vaut $d = 2,423 R_{planète}\sqrt[3]{\frac{\rho_{planète}}{\rho_{sphère}}}$. En appliquant cette formule au système Terre – Lune, **calculez jusqu'à quelle distance la Lune pourrait s'approcher sans danger de la Terre.** R_{Terre} = 6 378 km, ρ_{Terre} = 5 515 kg.m^{-3}, ρ_{Lune} = 3 344 kg.m^{-3}.

Avec les données fournies, on obtient d ≈ 18260 km, du centre de la Terre au centre de la Lune. Les surfaces des deux astres ne seraient alors séparées que de 10 150 km !

III.4 Détermination de la structure interne de la Lune

Essayons de déterminer grossièrement la structure interne de notre satellite.

Données : R_{Lune} = 1 737 km et M_{Lune} = 7,348.10^{22} kg

1. **Calculez d'abord sa masse volumique moyenne ρ.** Rappel : le volume d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

La masse volumique moyenne de la Lune est le quotient de sa masse et de son volume.

$$\rho = \frac{M_{Lune}}{\frac{4}{3}\pi R_{Lune}^3} = 3\ 347\ \text{kg/m}^3$$

2. **En déduire sa densité par rapport à l'eau**. Rappel : la masse volumique de l'eau liquide vaut 1 000 kg.m^{-3} sous une atmosphère, à 4 °C. On prendra cette valeur pour le calcul.

La densité moyenne de la Lune vaut 3,347. Elle est intermédiaire entre celle des roches et celle des métaux.

On peut ainsi imaginer que la Lune se compose de :

- un noyau dense, riche en fer (d = 10, soit ρ_{noyau} = 10 000 kg.m^{-3}) de rayon *x* ;
- un manteau de roches silicatées (d = 3, soit $\rho_{manteau}$ = 3 000 kg.m^{-3}), entourant le noyau. Ce manteau possède une épaisseur $R_{Lune} - x$.

3. En écrivant que la masse totale de la Lune est égale à la masse de son noyau augmentée de la masse de son manteau, **déterminez le rayon *x* du noyau.** Rappel : le masse M d'un corps de masse volumique ρ et de volume V est $M = \rho V$.

$$M_{Lune} = M_{noyau} + M_{manteau} = \rho_{noyau} V_{noyau} + \rho_{manteau} V_{manteau}$$

$$= \rho_{noyau}\frac{4}{3}\pi x^3 + \rho_{manteau}\frac{4}{3}\pi(R_{Lune}^3 - x^3)$$

On isole *x* et l'on obtient $x = \sqrt[3]{\dfrac{3M_{Lune} - 4\pi\rho_{manteau}R_{Lune}^3}{4\pi(\rho_{noyau} - \rho_{manteau})}}$ ≈ 638,2 km.

La Lune posséderait donc un noyau de 638,2 km de rayon, surmonté par un manteau de 1 098,8 km d'épaisseur. On peut vérifier que la masse de ce noyau additionné de la masse de ce manteau donne bien la masse totale de la Lune.

4. **Comment pourrait-on améliorer notre modèle, ici simpliste ?**

On peut inclure des couches supplémentaires de densité différente, proposer une variation continue de la densité en étudiant les propriétés de la matière à haute pression etc.