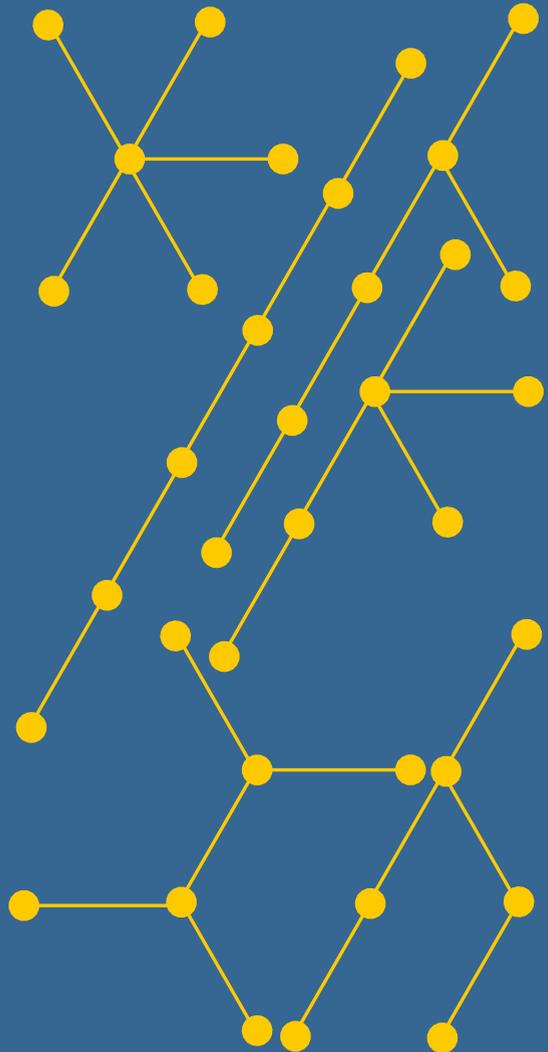


*PIERRE AUDIN
GUILLAUME REULLER
Département de mathématiques
du Palais de la découverte*

**FORMES
MATHÉMATIQUES**

Forêt d'« arbres » mathématiques

Ils sont constitués
de traits et de points.
Où sont leurs feuilles,
leurs racines ?
Quelle est la particularité
de cette forêt ?



Les arbres

En mathématiques, tout dessin constitué de traits (arêtes) et de points (sommets) est appelé un graphe. Un arbre est un graphe d'un seul tenant et ne doit pas contenir de cycle : pas moyen de tourner en rond dans un arbre ! Pour aller d'un sommet à un autre, il y a donc toujours un chemin qui suit des arêtes et ce chemin est unique.

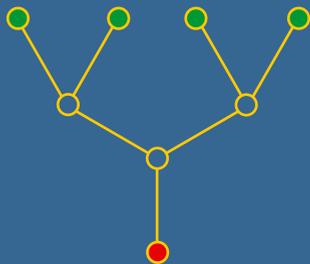


A gauche, un graphe d'un seul tenant ; à droite, un arbre ; ensemble, un graphe qui n'est pas d'un seul tenant.

La forêt de la page précédente rassemble tous les arbres que l'on peut former avec six sommets. (Vérifiez !)

Croissance des arbres

On peut construire (ou faire « croître ») un arbre peu à peu, en lui ajoutant une arête et un sommet. Les « feuilles » sont les sommets qui n'ont qu'un seul voisin, qui ne sont reliés par une arête qu'à un seul sommet.

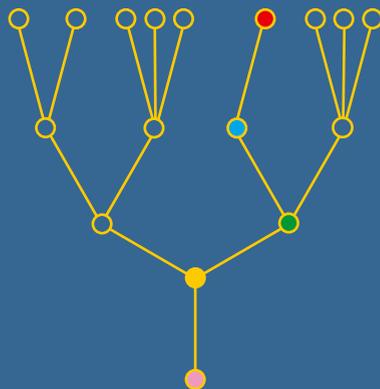


Sur ce dessin, les sommets verts sont des feuilles, le sommet rouge aussi, les autres non.

Une « racine » est un sommet à partir duquel on peut reconstruire l'arbre pas à pas, en ajoutant une arête terminée par un nouveau sommet. Et n'importe quel sommet peut servir de racine, vérifiez !

Exploitation des arbres

Les arbres peuvent servir dans diverses situations, en particulier pour indiquer une filiation ou une hiérarchie. Compter les arêtes qu'il faut parcourir d'un sommet à un autre est une façon d'évaluer la distance entre deux sommets. On peut ainsi calculer la distance qui sépare deux êtres humains, par exemple un Français et un Chinois. En général, un Français connaît son patron ou son ex-patron (pour un chômeur ou un retraité) ; un élève connaît son instituteur ou son professeur. Patrons et enseignants ont sans doute déjà rencontré le maire de la ville, qui a eu l'occasion de rencontrer le président de la République. Sur le dessin suivant, on va de rouge à bleu, à vert, à jaune, à rose. Et la distance de rouge à rose est 4, donc d'un Français au président de la République, il y a une distance de 4. Chaque Français peut affirmer qu'il connaît quelqu'un qui connaît quelqu'un qui connaît quelqu'un qui connaît le président de la République !



Il en est de même entre un Chinois et son président, et entre les deux présidents, il y a une distance de 1 : la distance de n'importe quel Français à n'importe quel Chinois est de $4 + 1 + 4$, soit 9. Alors que, sans doute, ils ne se connaissent pas du tout et ont même des vies très différentes. Bien sûr, il y a des exceptions : certains « ermites » voient cette distance augmenter, et les deux présidents ont une distance beaucoup plus courte que 9 !

P. A., G. R.