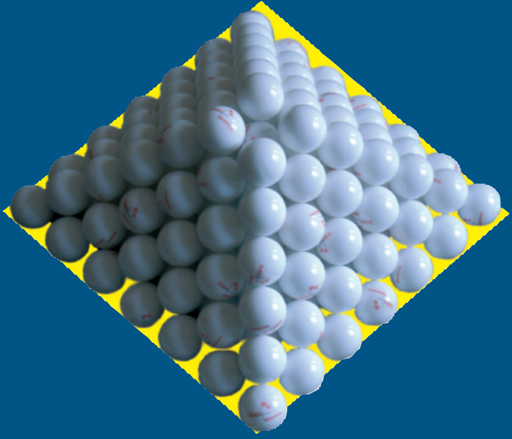
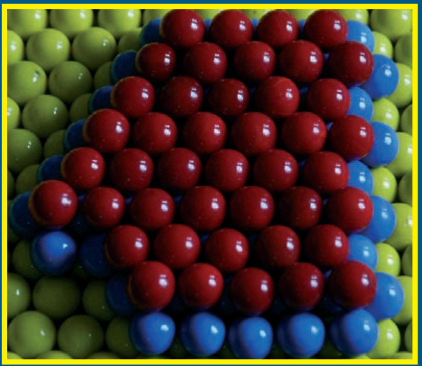
Robin JAMET
Département de mathématiques du Palais de la découverte

FORMES MATHÉMATIQUES

Comment empiler une infinité de sphères identiques en perdant le moins de place possible ?

De ces deux dispositions, laquelle est la meilleure ?

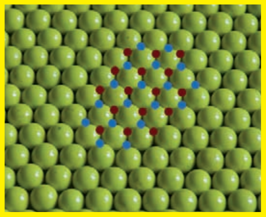




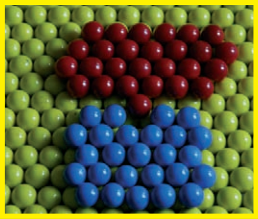
FORMES MATHÉMATIQUES

Ranger des sphères

La première idée qui vient pour résoudre ce problème est de raisonner par « étages ». On commence par placer les sphères sur un plan de la façon la plus dense possible, c'est-à-dire en formant des triangles équilatéraux (fig. 1) (que ce soit l'arrangement le plus dense de disques sur un plan n'a été démontré qu'en 1910 !). Puis, on pose par-dessus une couche semblable, décalée par rapport à la première : les sommets d'une couche sont au centre des triangles de la couche précédente (points bleus et rouges sur la figure 1). On a alors le choix entre deux possibilités (fig. 2) : en effet, seul un centre de triangle sur deux peut être occupé par une sphère du niveau supérieur.

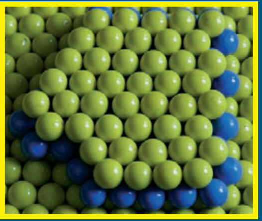


1



2

Pour la couche suivante on a encore le choix : soit reprendre la première position, soit occuper la seule qui ne l'a pas encore été. Il existe donc une infinité de combinaisons possibles, ayant toutes la même densité. A partir des trois positions de base, que l'on peut noter A, B et C, on peut choisir de n'occuper que deux positions : ABABAB… (fig. 3) ou d'alterner les trois possibilités ABCABC… (voir page précédente), ou encore de ne suivre aucune logique particulière.



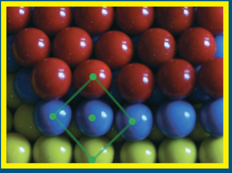
3

Mais ces empilements sont-ils les plus denses ?

Si on arrange les sphères en carrés plutôt qu'en triangles (voir page précédente), la densité sur chaque plan est moindre. Mais la couche supérieure, obtenue en mettant une sphère au centre de chacun des carrés, s'enfonce plus dans la première, surtout si on écarte les sphères de la première couche. Il a été démontré que cette deuxième configuration, dite « cubique centrée », est en fait moins dense que la première, mais on peut à travers cet exemple saisir la difficulté de la question, si simple en apparence.

Pour ne rien arranger, certains arrangements qui paraissent différents l'un de l'autre se trouvent en fait coïncider : ainsi la configuration « cubique à face centrée », que l'on obtient en plaçant une sphère sur chaque sommet d'un cube et au milieu de chaque face du cube, se trouve être la même que l'empilement en triangles équilatéraux ABCABC… vu sous un autre angle (fig. 4). Pire que tout, il se pourrait très bien qu'un empilement ne se décrivant pas à partir de plans superposés soit plus efficace…

On comprend mieux alors que ce problème, énoncé par Kepler en 1611, ait attendu jusqu'en 1998 pour être résolu. Et encore, la revue ayant publié la démonstration la qualifie comme sûre à 99 %. En effet, la démonstration fournie par Thomas Hales est tellement complexe que personne n'ose se porter garant de sa justesse. De plus, cette preuve « mathématique » nécessite un grand usage d'ordinateur, d'où la crainte de trouver des erreurs de programmation, des mauvais fonctionnements de machine… Tant d'énergie et de temps pour démontrer un résultat que tous les épiciers connaissent depuis bien longtemps : le tas d'oranges classique (ABAB… ou ABC…) serait bien l'empilement le plus dense ! Sauf que les épiciers ne rangent qu'un nombre fini d'oranges, et dans un espace clos…



4

R. J.

Photographies : Palais de la découverte/C. Judei.