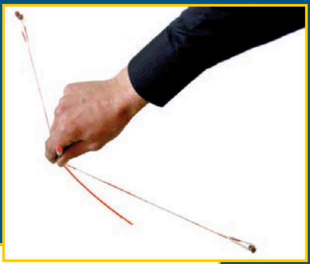
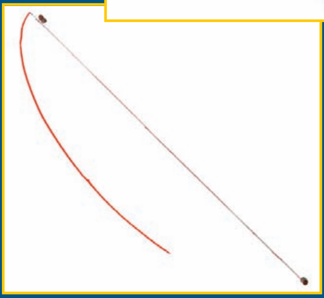
PIERRE AUDIN
GUILLAUME REUILLER
Département de mathématiques du Palais de la découverte

FORMES MATHÉMATIQUES

Comment agrandir une ellipse ?

Plus précisément, si l'on a su tracer une première ellipse, comment s'appuyer sur elle pour en tracer une plus grande, qui ait les mêmes foyers ?



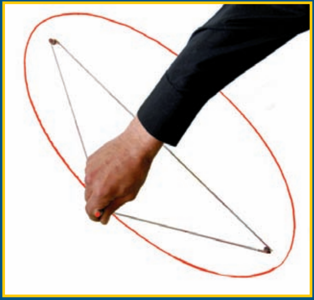


Si un jardinier veut créer un parterre de fleurs « ovale », il va probablement appliquer la bonne vieille recette suivante : planter deux piquets, attacher une ficelle mal tendue de l'un à l'autre, puis utiliser un troisième piquet pour tendre la ficelle et tracer l'ellipse sur le sol avec ce piquet.

Mais le jardinier ne pourra tracer ainsi qu'une demi-ellipse : au-delà, la ficelle va s'enrouler autour de l'un des piquets plantés. Il devra donc s'y prendre à deux fois.

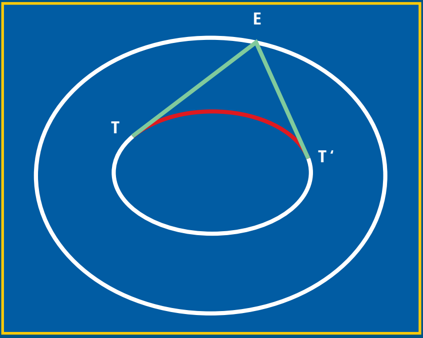
Pour tracer l'ellipse en une seule fois, le jardinier astucieux prendra une ficelle dont la longueur est supérieure au double de la distance entre les deux piquets, pour former une boucle autour d'eux. Le troisième piquet, tendant la ficelle qui coulisse sur les deux piquets plantés, pourra tracer l'ellipse entière, sans interruption.

Pour faire plus sérieux, on appelle les deux points où sont plantés les piquets les foyers de l'ellipse (notons-les F et F'). Avec ce procédé, on trace l'ensemble des points M du plan tels que la somme des distances du point M à ces deux foyers (MF+MF') soit constante et égale à la longueur de la ficelle. Le mathématicien sait bien que le résultat d'une telle construction sera une ellipse.



Si le jardinier change la longueur de sa ficelle, en gardant les piquets aux mêmes foyers, il obtient une autre ellipse, qui a les mêmes foyers que la précédente : on dit des deux ellipses qu'elles sont homofocales. Il peut donc ainsi construire toute une famille d'ellipses, plus ou moins grandes et qui sont toutes homofocales. Mais imaginons qu'il ait déjà fait un parterre de fleurs, limité par un petit grillage bas pour faire plus joli, et qu'il décide d'entourer ce premier parterre avec un autre en forme d'ellipse ayant, tant qu'à faire, les mêmes foyers que le premier. Les piquets ne sont plus en place, leurs emplacements sont perdus, les fleurs ont déjà commencé à pousser et vont faire mauvais ménage avec une ficelle remise en place. Le jardinier ne peut donc plus utiliser sa bonne vieille méthode.

Le théorème de Graves va sortir notre jardinier d'affaire. Graves a montré en



effet que d'un point (E) de l'ellipse extérieure, si l'on trace les deux tangentes (en vert sur le dessin) vers l'ellipse intérieure, la somme des distances (ET + ET'), aux points de tangence (T et T') est supérieure à la longueur de l'arc d'ellipse qui les sépare (en rouge) ; et plus précisément, l'écart avec cet arc d'ellipse est constant.

Dans la pratique, si au lieu d'appuyer une ficelle sur deux piquets replantés aux mêmes foyers, notre jardinier s'appuie sur la première ellipse, il va tracer la deuxième ellipse, homofocale à la première, bien qu'il ne sache plus où se trouvent les foyers concernés. La démonstration de Graves utilise le calcul différentiel, nous ne l'aborderons donc pas ici, mais vous pouvez faire l'expérience, cela fonctionne très bien : enroulez une ficelle un peu trop longue sur le tour d'une ellipse, tendez-la et tracez.

P. A. et G. R.