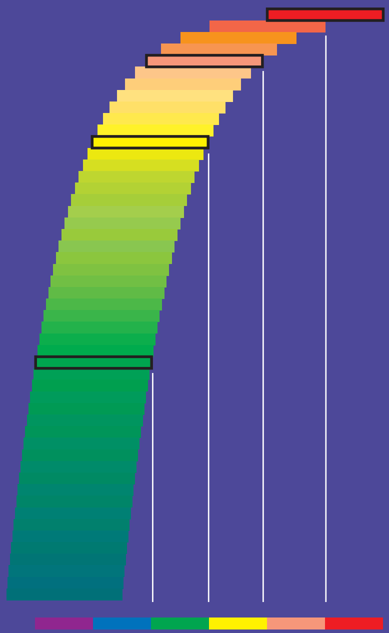
PIERRE AUDIN
GUILLAUME REUILLER
Département de mathématiques du Palais de la découverte

FORMES MATHÉMATIQUES

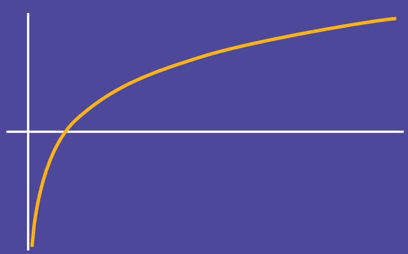
Une pile de briques



Comment empiler des briques pour que la brique du haut de la pile avance le plus possible par rapport à la brique du bas de la pile ?

On suppose disposer d'un certain nombre de briques toutes identiques. On les empile en s'autorisant de les décaler les unes par rapport aux autres. Jusqu'où celle qui est en haut pourra-t-elle avancer par rapport à celle d'en bas, sur laquelle repose toute la pile ? Et si on suppose qu'on dispose d'autant de briques que l'on veut ?

Quel rapport entre cette pile de briques et cette courbe ?



On peut faire l'experience avec quelques briques. S'il n'y en a que deux, on arrive à décaler la brique du dessus de quasiment la moitié de sa longueur.

Si on la laisse comme ça, la troisième n'avancera pas plus, sinon, ensemble, la deuxième et la troisième vont pivoter. Pourtant, si on recule un peu la deuxième, la troisième peut avancer un peu plus, et finalement, à force de tâtonner, on avance plus loin qu'avec deux briques.

Supposons notre pile de trois briques stable, la troisème avançant notablement par rapport à la première. Prenons une quatrième brique. La poser sur la pile va immanquablement faire tomber les briques de la pile. En fait, le problème est plus simple à résoudre si on le prend à l'envers : rien ne nous oblige à poser la nouvelle brique dessus : il n'y a qu'à la poser par en dessous. Cela signifie qu'on la pose à côté et que l'on déplace la pile précédente au-dessus de cette quatrième brique. Puisqu'il y avait stabilité de la pile, une manipulation tranquille permet de l'amener sur la dernière brique sans rien faire tomber.

C'est cette pile de trois briques que l'on ajuste sur la quatrième brique jusqu'à la limite du déséquilibre. Et l'on peut recommencer, brique par brique, en les « ajoutant » par en dessous à chaque fois. Et voilà donc comment construire la pile de briques recherchée.

Reste à savoir de combien cette pile va permettre à la brique d'en haut de dépasser par rapport à celle d'en bas, en fonction du nombre de briques empilées. Pour cela, on va appliquer un bon vieux principe de mécanique : pour qu'il y ait équilibre, *la verticale du centre de gravité* (de la pile posée sur la brique) *doit passer par le polygone de sustentation*, ici la partie de la brique sur laquelle repose toute la pile. Par exemple, si l'on ajuste 3 briques sur 1 brique, la verticale du centre de gravité de l'ensemble est à 3/4 de celui de la brique et à 1/4 de celui de la pile de 3 briques. Si l'on pose cette nouvelle pile sur une cinquième brique, la verticale du centre de gravité de la pile de 4 briques doit passer par la cinquième brique sur laquelle elle est posée. Donc la pile de 4 briques ne peut avancer par rapport à la cinquième brique que de 1/4 de demi-brique. La verticale du centre de gravité de ces 5 briques s'obtient par quatre briques contre une, donc elle peut se déplacer de 1/5. Et ainsi de suite.

Pour une pile de deux briques, on avance de une demi-brique. Pour trois briques, on avance encore de 1/2 demi-brique. Pour 4 briques, on avance encore de 1/3 demi-brique. Et ainsi de suite, on avance au total de 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ... et si l'on poursuit cette somme indéfiniment, elle part à l'infini, tout doucement, mais très sûrement. Pour atteindre une longueur de 10 demi-briques, il faudra environ 12 500 briques : en théorie, ça marche, en pratique, il y aura des problèmes de résistance des matériaux, avant même que ne se pose celui de la rotondité de la terre. (Sur la page précédente, on n'a avancé que d'un peu plus de 4 demi-briques.)

Ce qui est amusant, c'est que la forme de cette pile de briques donne une idée de la courbe du logarithme, parce que (pour n entier naturel) log n est voisin de 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ... + 1/n. Voilà une façon de faire apparaître le logarithme en architecture.

Cet exercice résolu, en voici un laissé sans solution pour le lecteur curieux qui sommeille en chacun de nos lecteurs. Un pion du jeu de dames ou un bouchon de liège sont des cylindres (à peu près). Mais l'un flotte avec son axe vertical, alors que l'autre flotte avec son axe horizontal. Peut-on trouver des cylindres qui flottent indifféremment dans les deux positions ? (Envoyez vos solutions à maths@palais-decouverte.fr)

P. A. et G. R.