

FORMES
MATHÉMATIQUES

Un angle droit égal à un angle obtus ! ?

Cherchez l'erreur !

PIERRE AUDIN ET GUILLAUME REULLER

Département de mathématiques du Palais de la découverte

ABCD est un rectangle. De C, on construit à l'extérieur du rectangle ABCD un segment CE égal à la largeur (AD ou BC) du rectangle. I est le milieu de la longueur CD, J est le milieu du segment AE. Les médiatrices JK et IK des segments AE et CD se coupent en K.

Les triangles ADK et ECK ont leurs côtés respectivement égaux, donc leurs angles aussi. En particulier, l'angle ADK et l'angle ECK sont égaux. Mais comme CDK est un triangle isocèle, ses angles à la base, l'angle CDK et l'angle DCK, sont égaux. Il reste donc que les angles ADC et ECD sont égaux, c'est-à-dire que l'angle droit ADC est égal à l'angle ECD, qui est obtus puisque E est extérieur au rectangle...

Il y a forcément une erreur !

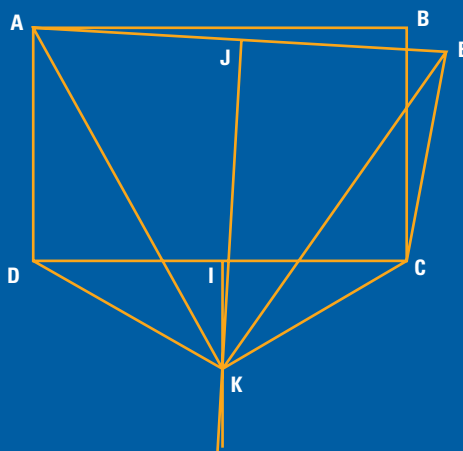


Figure 1

En réalité, le dessin était faux... Le segment CE n'avait pas la bonne longueur, et le point K se situe beaucoup plus loin qu'il n'y paraît sur le dessin.

Si l'on augmente l'angle BCE, le point K se rapproche (figure 3) et la situation devient plus claire. Les triangles ADK et ECK n'apparaissent plus comme soi-disant symétriques. Ils sont bien superposables, mais on s'aperçoit que l'angle ECK ne contient pas l'angle DCK !

Voilà un exemple de la différence entre la géométrie et le dessin : un dessin permet de visualiser des propriétés géométriques mais peut aussi induire en erreur à cause des évidences qu'il est censé receler. Ici, on croit que tel angle contient tel autre, on ne se posera pas la question de le vérifier, ça saute aux yeux. Mais ce qui saute aux yeux est malheureusement faux.

Il est souvent difficile de rédiger une démonstration parfaite, mais chaque fois que dans une démonstration il apparaît une formulation comme « il est clair que... » ou « c'est trivial » ou « on vérifiera aisément que... » il est en fait nécessaire de chercher à contrôler ces évidences.

Page précédente, c'est pire : on sous-entend qu'un angle en contient un autre au seul vu du dessin. Comme quoi la boutade célèbre « la géométrie est l'art de faire des raisonnements justes sur des figures fausses » est une formulation un peu rapide.

Les dessins sont faits de points et de droites qui ont une épaisseur, les longueurs et les angles ont des valeurs approximatives. Une démonstration géométrique devrait s'appuyer systématiquement sur les axiomes et les théorèmes déjà démontrés et utilisables dans la situation envisagée. L'art de la rédaction consiste à dire l'essentiel sans allonger indéfiniment la démonstration.

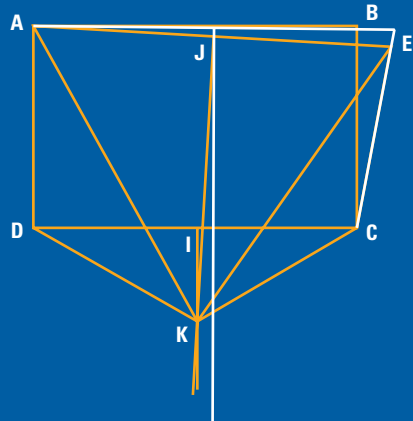


Figure 2

En blanc, le dessin rectifié, sans le point K qui serait beaucoup plus bas.

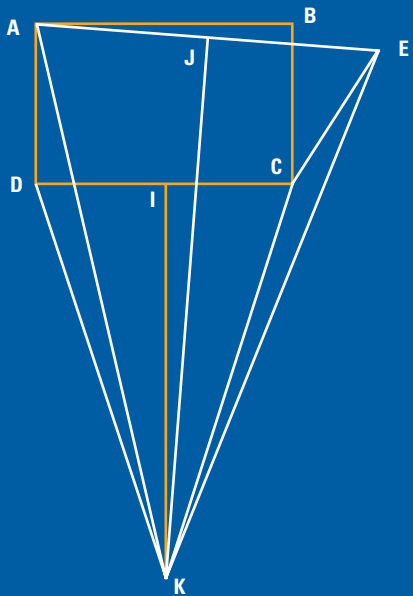


Figure 3