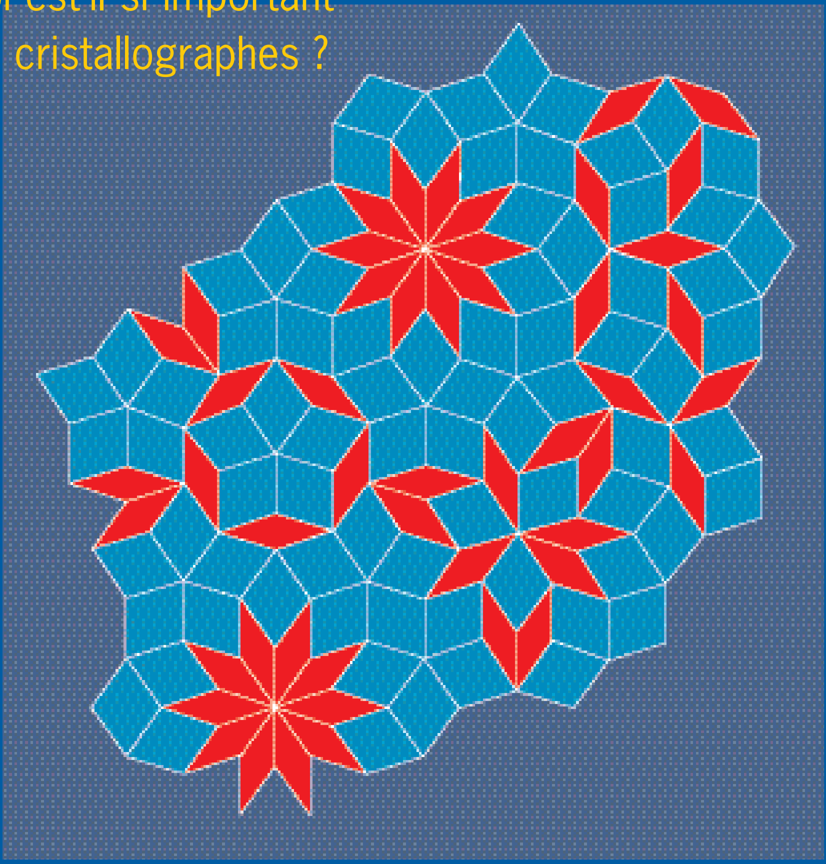
FORMES MATHÉMATIQUES

Pierre AUDIN
et Guillaume REUILLER
Département de mathématiques du Palais de la découverte

Quelle est l'originalité de ce pavage ?

En quoi sa structure est-elle intimement liée au pentagone régulier ?

Pourquoi est-il si important pour les cristallographes ?



Un pavage à la Penrose

Pour construire un tel pavage, il faut partir d'un pentagone régulier. C'est-à-dire un pentagone convexe inscriptible dans un cercle et dont tous les côtés et les angles sont égaux. Si vous tracez des diagonales de ce pentagone, vous pourrez obtenir deux types de triangles isocèles (en rouge et en bleu sur la figure 1) dont au moins un des angles mesure 36°, les autres angles mesurant respectivement 72° et 108° (soit 2 et 3 fois 36°). En passant, vous faîtes apparaître le nombre d'or, qui est le rapport entre la diagonale d'un pentagone régulier et son côté. Les deux triangles sont d'ailleurs appelés des « triangles d'or ».

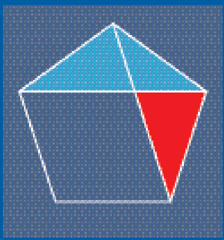


Figure 1
Pour construire le pavage de la page précédente, il suffit d'ajouter à chacun de ces triangles son symétrique par rapport à la base. On obtient alors les deux types de losanges (en rouge et en bleu) qui le composent.

Alors qu'artistes et géomètres créaient des pavages depuis des millénaires, ce n'est qu'en 1974 que ce pavage d'un type nouveau est apparu, sorti tout droit de l'imagination du mathématicien Roger Penrose. Sa motivation ? Le jeu ! Roger Penrose s'est amusé à construire un pavage qui, contrairement à tous ceux que l'on avait réalisés précédemment, ne devait posséder aucune régularité. L'essentiel des pavages que les artistes nous donnent à voir (ceux d'Escher comme ceux de l'Alhambra) sont périodiques : ils consistent à paver une petite partie du plan en utilisant un motif, reproduit régulièrement autant de fois qu'il est nécessaire. La singularité du pavage de Penrose est que si on le poursuit à l'infini, on va obtenir des dispositions de losanges sans cesse renouvelées. On parle alors de pavage quasi périodique.

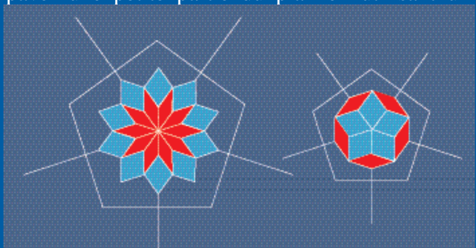


Figure 2
Comme pour un pentagone régulier, ces parties du pavage sont conservées si on les fait tourner d'un ou de plusieurs cinquièmes de tour.

Pour un tel pavage, aucune opération géométrique (translation, rotation, symétrie…) ne réussit à le superposer totalement à lui-même. Ce qui, dans notre exemple, n'empêche pas que l'on puisse identifier certaines formes proches du pentagone régulier qui sont conservées par des rotations d'un cinquième de tour (fig. 2) ; mais ce n'est que local et ces rotations ne conservent pas le pavage pris dans son intégralité.

Tout cristallographe le sait : il est impossible de paver le plan avec des pentagones réguliers tous identiques (fig. 3). Or un cristal a longtemps été vu comme la répétition périodique d'un même motif (appelé maille élémentaire) qui pave l'espace. Il semblait alors inconcevable de trouver dans un cristal des symétries propres au pentagone régulier. Pourtant, en 1984, des cristallographes observèrent dans certaines images de « cristaux » des formes ayant les mêmes propriétés géométriques que le pentagone régulier. Le pavage quasi périodique exhibé par Penrose répondit à leurs interrogations en montrant qu'il n'était pas impossible d'obtenir localement de telles formes dans un pavage, même si elles ne permettent pas de décrire l'ensemble de ce pavage. Autrement dit, la « récréation mathématique » de Penrose a permis de justifier l'existence d'une nouvelle structure : les quasi-cristaux.

Pour finir, jetez un dernier coup d'œil sur ce pavage. N'avez-vous pas l'impression d'y voir des cubes en perspective ? Cela traduit le fait que ce dessin peut s'obtenir en projetant en 2 dimensions des empilements en dimension 4 d'hypercubes… Mais cela donnerait lieu à une autre promenade dans les mathématiques !

Retrouvez ce pavage « quasi périodique » dans l'exposition permanente Formes mathématiques *installée près du planétarium.*

Figure 3
Trois pentagones réguliers laissent un espace impossible à combler avec un quatrième.