

PIERRE AUDIN
ET GUILLAUME REULLER
Département de mathématiques
du Palais de la découverte

FORMES
MATHÉMATIQUES

Qu'est-ce qu'un hypercube ?

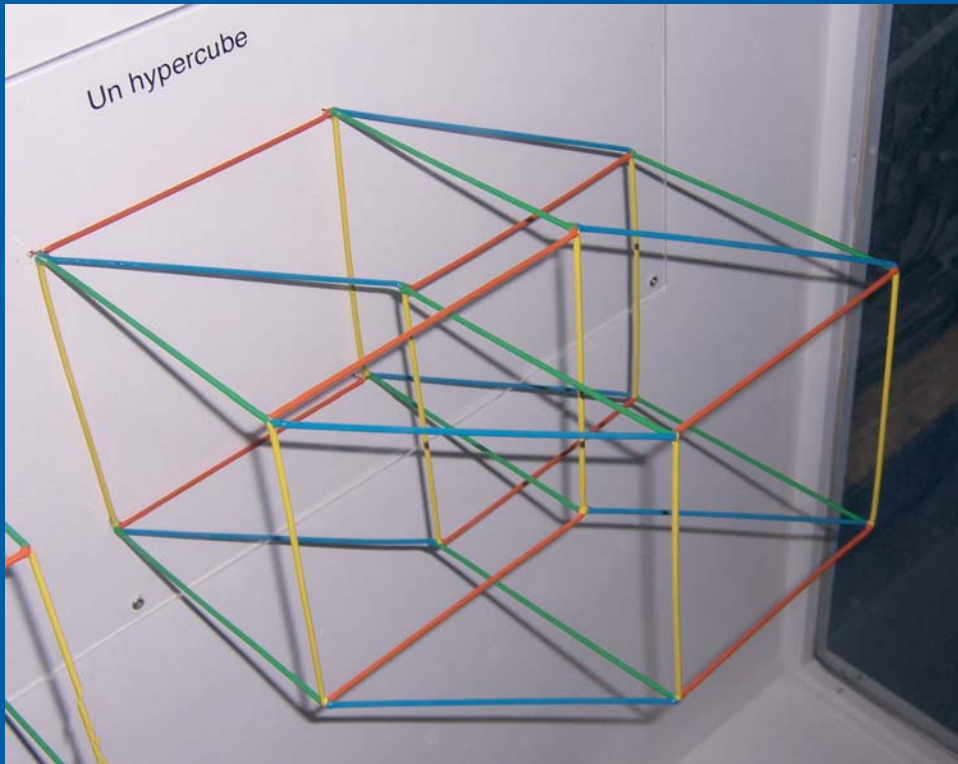


Figure 1

© Palais de la découverte/G. Reuiller

Cet objet est présenté dans l'exposition permanente
Formes mathématiques.

Entrez dans la quatrième dimension

Les mathématiciens n'ont pas attendu la célèbre série télévisée de science-fiction pour se demander ce que pourrait être la « quatrième dimension ». Pour nous qui voyons en trois dimensions, un objet de dimension quatre est difficile à imaginer. Essayons tout de même, en nous rappelant comment on passe d'une dimension à l'autre.



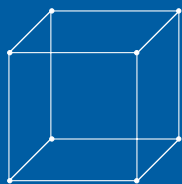
Partons d'un objet de dimension zéro : un point (ici représenté par une surface !).



Déplaçons-le entre deux positions limites : on obtient un segment, objet à une dimension.

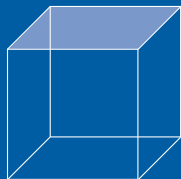


Si on déplace ce segment perpendiculairement à la droite qui le contient, on peut obtenir un carré, donc un objet de dimension deux.



Continuons : si on déplace ce carré perpendiculairement au plan qui le contient, on peut obtenir un cube, objet de dimension trois. Et si on pouvait déplacer ce cube perpendiculairement à l'espace à trois dimensions qui le contient ? On pourrait obtenir un hypercube, objet de dimension quatre.

Conceptuellement, cela ne pose aucun problème. Le souci vient de la nécessité de se représenter ce nouvel objet. Comparons avec ce qui se passe pour le cube. Que représente ce dessin pour vous ?



À moins d'avoir complètement oublié vos cours de géométrie, il y a peu de chance que vous ayez pensé à un carré. Pourtant, dans le dessin en perspective cavalière d'un cube, la même figure géométrique représente un carré, censé être placé dans un plan perpendiculaire à celui de la feuille. Représenter en deux dimensions un objet qui en possède trois, c'est nécessairement perdre de l'information sur cet objet.

On ne peut pas représenter sur la feuille les six faces du cube sans les déformer. En fait, si l'on s' imagine un cube à la vue du dessin précédent, c'est essentiellement pour des raisons culturelles : on en a l'habitude.

Le même problème va se poser pour l'hypercube. Quand on va le représenter en trois dimensions, on va devoir déformer certains cubes qui ne vont plus apparaître comme tels. Sur la photo de la page précédente, les deux cubes formés par les arêtes jaunes, oranges et vertes ne sont pas déformés, contrairement aux six autres formés avec les autres familles d'arêtes.

Et quand on représente notre hypercube en seulement deux dimensions, c'est encore pire.

La différence de taille avec un cube, c'est que personne ne verra jamais un hypercube !

