

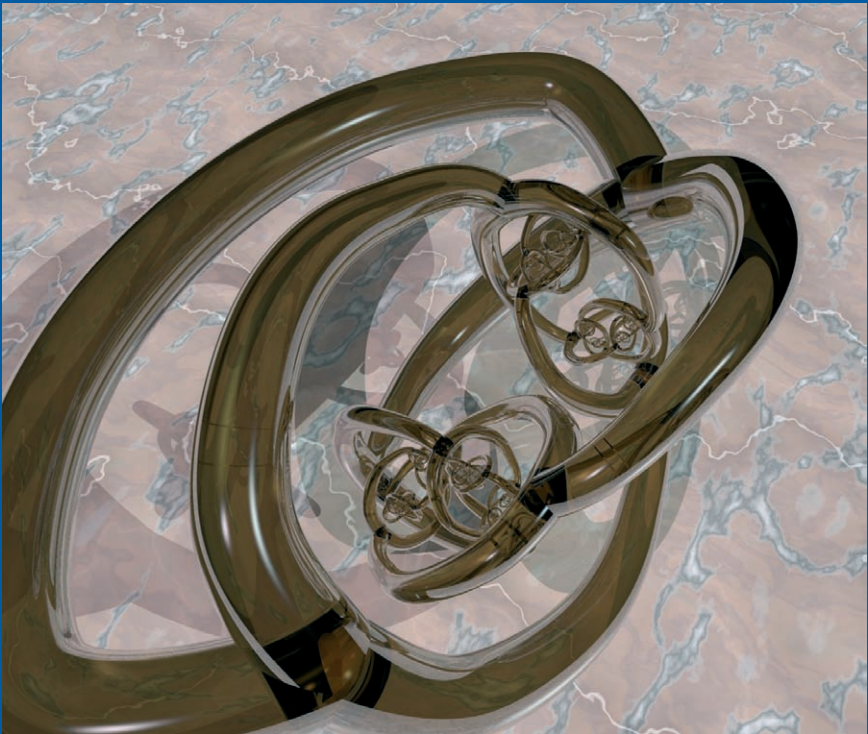
ROBIN JAMET

Département de mathématiques
du Palais de la découverte

FORMES

MATHÉMATIQUES

Quelle est cette drôle de bête à cornes ?

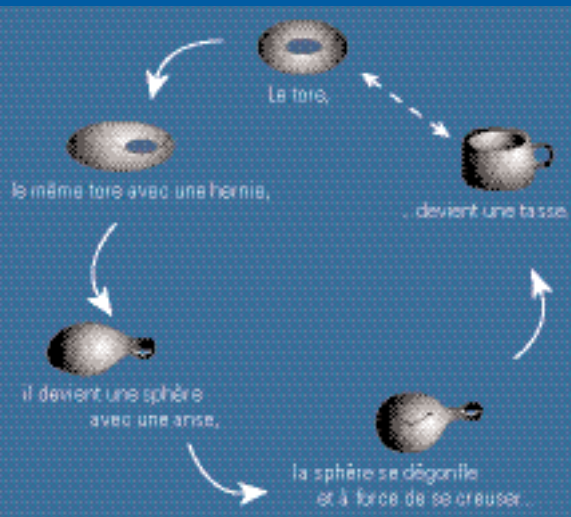


© Rémy Oudompheng

Comment la construit-on ?
Quel peut bien être son intérêt
en mathématiques ?

La sphère à cornes

En topologie, on étudie les propriétés qui ne changent pas si l'on se contente de déformer un objet sans le couper ni le coller. On peut donc identifier deux objets s'il est possible de passer de l'un à l'autre uniquement par des déformations. Ainsi, un ballon de rugby et un ballon de foot sont un seul et même objet. De même, une bouée et une tasse à café. Cela peut paraître moins évident, et pourtant le schéma ci-après vous montre comment passer de l'une à l'autre. Cette première définition d'un objet est dite « intrinsèque ».



Il en existe une seconde, dite « plongée ». Pour celle-là, on s'intéresse à l'espace créé autour de l'objet. Par exemple, une surface fermée partage l'espace en deux zones : l'intérieur et l'extérieur. Prenons deux surfaces fermées : une bouée et un ballon. Si vous attachez une ficelle autour d'un ballon, on pourra toujours l'enlever en la faisant glisser. Autour d'une bouée, si la ficelle passe par le trou, cela devient impossible. L'extérieur de ces deux objets n'étant pas le même, on ne peut pas les identifier.

L'intuition nous dit que ces deux définitions devraient coïncider. Ce n'est pourtant pas le cas. L'objet présenté ici, dû au mathématicien James Alexander (1888-1971) et qu'il a baptisé

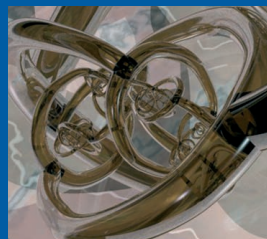
« sphère à cornes », nous le montre. On obtient cette sphère à cornes à partir d'une sphère banale : on l'étire pour former deux « cornes » que l'on met face à face, sans contact. Puis on recommence : à l'extrémité de chacune des cornes, on fabrique deux cornes plus petites qui s'entrecroisent avec celles d'en face, et ainsi de suite, à l'infini. On obtient donc une infinité de cornes, séparées par des distances aussi petites que l'on veut entre elles. Suivant la définition intrinsèque, cet objet est une sphère, puisqu'il a été obtenu à partir de cette dernière sans découpage ni collage. Mais suivant la définition plongée, il s'apparente au tore : il sera impossible d'enlever une ficelle attachée autour d'une corne sans la couper...

Pour exclure ce « monstre » et faire en sorte que les deux définitions coïncident, on peut se restreindre aux « variétés », c'est-à-dire dans le cas présent, aux surfaces qui peuvent localement s'identifier à un plan. Une sphère, par exemple, peut être assimilée à un plan quand on la regarde d'assez près, ce qui permet de disposer de cartes planes relativement justes à l'échelle d'une région et au-dessous, contrairement à une carte du monde qui est nécessairement très faussée.

La sphère à cornes n'est pas une variété. C'est un objet fractal : si l'on zoome sur les cornes, on retrouve un objet similaire à l'objet entier. Cela signifie qu'à « l'extrémité » des cornes, il existe une infinité de pics de taille arbitrairement petite. Quelle que soit la taille du zoom, on ne pourra donc jamais assimiler la surface obtenue à un plan.

R. J.

© Rémy Oudompheng.



Détail de la sphère à cornes : c'est toujours une sphère à cornes.