FORMES MATHÉMATIQUES

Romain Attal
Département de mathématiques
du Palais de la découverte

Empilements de cercles

Comment a-t-on numéroté ces cercles ?

Un empilement de cercles est une famille de cercles, tracés sur une surface, telle que deux cercles quelconques soient toujours tangents ou disjoints.

Un tel empilement peut s'obtenir de la manière suivante. Traçons d'abord trois cercles deux à deux tangents, de rayons r_1, r_2 et r_3. Ils sont tangents intérieurement à un même cercle C (le grand cercle rouge sur la figure 2).

Ces trois cercles définissent un interstice, délimité par trois arcs de cercle, dans lequel on peut tracer un unique cercle qui soit tangent extérieurement aux trois précédents (le petit cercle rouge sur la même figure). C'est en fait le plus grand cercle qui puisse entrer dans cet interstice. Puis, on répète à l'infini la construction. C'est Apollonios de Perga, géomètre de l'Antiquité grecque qui eut l'idée de ce petit jeu.

À chaque étape, pour calculer le rayon r_4 du cercle interstitiel en fonction des trois précédents, il est plus commode de considérer la courbure c de chaque cercle, définie comme l'inverse du rayon :

$$c = 1/r.$$

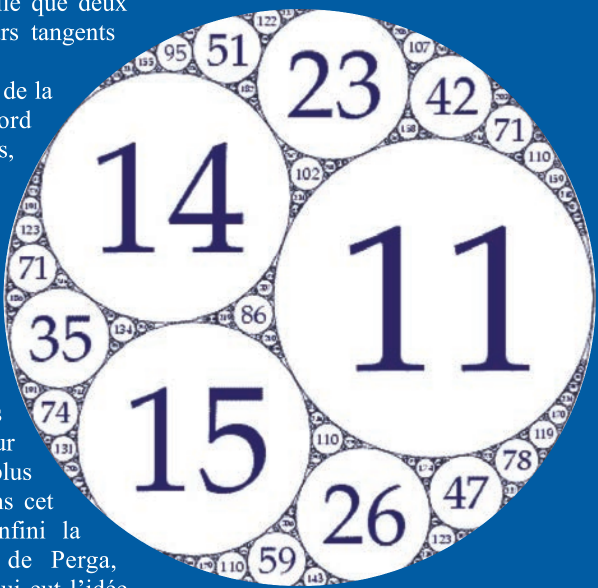

Figure 1
Un empilement de cercles apollonien.

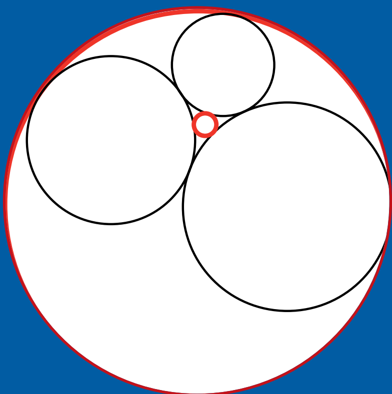

Figure 2
Une configuration de Descartes.

Un théorème de René Descartes (1596-1650) nous dit que le carré de la somme des courbures de quatre cercles deux à deux tangents est le double de la somme de leurs carrés :

$$(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 = 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^3 + c_4^2).$$

Sur la figure 1, on a indiqué dans chaque cercle la valeur de sa courbure. Plus le cercle est petit et plus ce nombre est grand. On peut vérifier que pour les quatre cercles de courbure 11, 14, 23, et 102, on a bien la relation :

$$(11 + 14 + 23 + 102)^2$$
$$= 2(11^2 + 14^2 + 23^2 + 102^2).$$

On vérifie aussi aisément que 102 peut être remplacé par (-6) dans cette relation :

$$(11 + 14 + 23 - 6)^2$$
$$= 2(11^2 + 14^2 + 23^2 + (-6)^2).$$

En effet, dans cet exemple, le grand cercle C a pour rayon 1/6 et sa courbure est affectée du signe – car les trois cercles initiaux (11, 14, 23) lui sont tangents intérieurement. En fait, si on connaît trois des quatre courbures et que l'on cherche la quatrième, la formule de Descartes nous conduit à résoudre une équation du second degré dont on sait qu'elle a en général deux solutions.

Par exemple, les courbures des grands cercles du bas et du haut valent 15 et 23 car ils sont tangents au cercle extérieur de courbure (-6), et aux cercles de courbure 11 et 14 :

$$(-6 + 11 + 14 + 15)^2$$
$$= 2((-6)^2 + 11^2 + 14^2 + 15^2)$$

$$\text{et } (-6 + 11 + 14 + 23)^2$$
$$= 2((-6)^2 + 11^2 + 14^2 + 23^2).$$

De même, le cercle coincé entre 11, 14, et 15 a pour courbure 86 car 86 est le seul nombre positif tel que :

$$(11 + 14 + 15 + 86)^2$$
$$= 2(11^2 + 14^2 + 15^2 + 86^2).$$

On obtient ainsi toutes les courbures des cercles interstitiels en résolvant l'équation de Descartes où trois cercles sont fixés et le quatrième vient se caler entre eux. L'empilement de cercles précédent est particulier car les courbures de tous les cercles sont des nombres entiers. Ceci découle du fait que, si le cercle extérieur et trois cercles intérieurs sont fixés avec des courbures entières, par exemple (-6, 11, 14, 23), alors tous les autres cercles interstitiels auront des courbures entières (102, 15, 86, 26, 23, 35...).

Pour positionner les centres des cercles, on peut utiliser une généralisation de la relation de Descartes qui fait intervenir à la fois les courbures des cercles et les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 qui repèrent leurs centres. La Relation de Descartes « complexe »

$$(c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 + c_4z_4)^2$$
$$= 2((c_1z_1)^2 + (c_2z_2)^2 + (c_3z_3)^2 + (c_4z_4)^2).$$

dont découle la précédente, permet donc de trouver la courbure et le centre du cercle interstitiel en fonction des courbures et des centres des trois cercles deux à deux tangents qui l'entourent.

Le Théorème de Descartes peut être généralisé à des espaces courbes (la sphère, le disque hyperbolique...) et à des empilements de *n*-sphères en dimension *n+1*.

R. A.