

PIERRE AUDIN  
Département de mathématiques  
du Palais de la découverte

FORMES  
MATHÉMATIQUES

## Combien y a-t-il de coloriages différents des faces d'un cube avec six couleurs ?

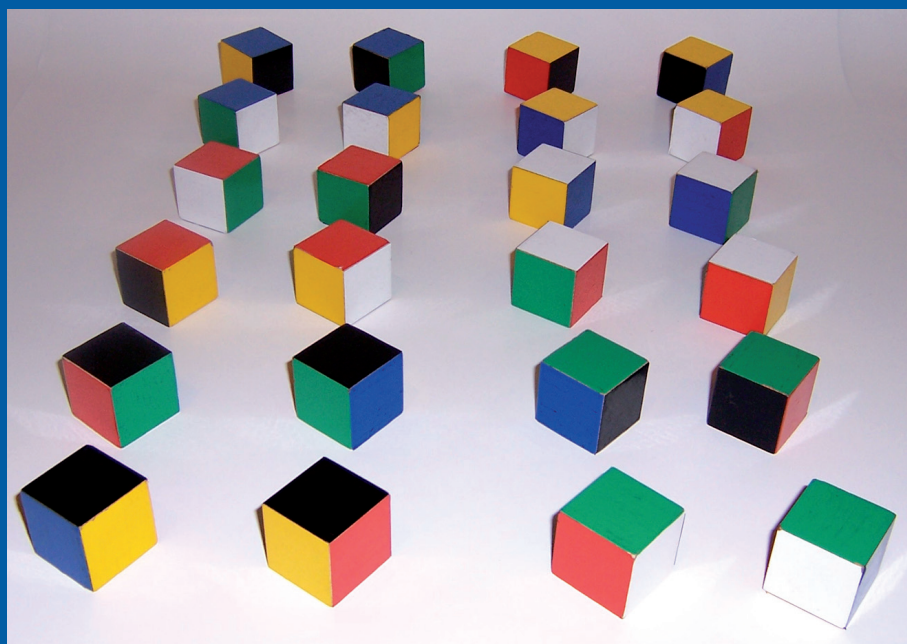


Figure 1

La question, posée en direct à des lauréats d'un concours mathématique (élèves de 3<sup>e</sup> et de 2<sup>e</sup>), a donné immédiatement comme réponse « 720 », réponse venant d'un élève de 2<sup>e</sup>. Prié d'expliquer comment il avait obtenu ce résultat, il répondait : « il y a six choix pour la couleur de la première face, puis cinq pour la deuxième, quatre pour la troisième, etc. ; ça fait  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  donc 720 », sous les applaudissements de la salle. Il était donc convaincant. Pourtant, il n'y en a pas autant.

Les photographies  
sont de G. Reuiller.

## Coloriages en six couleurs des faces d'un cube

Il est impossible de voir simultanément les six faces d'un cube, à moins d'utiliser un patron. Une idée serait alors, pour répondre à notre question, de compter les différentes manières de colorier les carrés correspondant aux faces sur un patron du cube. Mais ce n'est pas suffisant car plusieurs coloriages différents du patron peuvent donner en fait le même coloriage du cube. C'est par exemple le cas des six patrons de la figure 2. Utiliser cette méthode suppose donc de compter combien il y a de coloriages de patrons différents pour un même coloriage de cube. L'idée de raisonner sur un patron n'était peut être pas la meilleure.

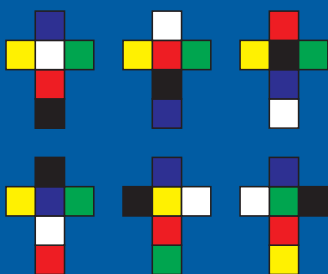


Figure 2

**Six coloriages de patrons différents correspondant à un même coloriage du cube.**

*Pour s'en convaincre, il faut s'imaginer le cube correspondant à chaque patron posé sur sa face noire, où qu'elle soit sur le patron, avec, par exemple, la face rouge derrière. Pour le même coloriage de cube, il y a encore d'autres coloriages de patrons possibles.*

Reprenons en réfléchissant directement sur le cube. On dispose des couleurs : noir, blanc, rouge, bleu, vert, jaune. Colorions en noir la face sur laquelle nous posons le cube. La face opposée, celle du dessus, peut avoir l'une des cinq autres couleurs. Pour fixer les idées, supposons que nous la colorions en blanc. Le cube peut désormais pivoter sur l'axe haut-bas et nous montrer les quatre faces restantes, à colorier avec les quatre couleurs restantes. Faisons pivoter le cube pour que la face rouge se retrouve derrière. Il reste alors les trois couleurs bleu, vert, jaune à utiliser pour colorier les trois

faces restantes, ce qui se fait de  $3 \times 2 \times 1 = 6$  façons différentes.

Quand on a choisi la couleur de la face opposée à la face noire, il y a donc six coloriages possibles du cube. Comme on peut choisir de cinq façons la couleur de la face opposée à la face noire, cela fait  $6 \times 5 = 30$  coloriages différents et non 720. Le même coloriage du cube donne donc  $720 : 30 = 24$  coloriages différents de patrons du cube, qui correspondent à 24 façons de positionner le cube dans l'espace. La figure 1 de la page précédente montre ainsi le même cube, présenté dans les 24 positions possibles (on peut vérifier que quand on choisit de placer, par exemple, la face blanche en haut, il y a encore 4 façons de positionner le cube).

## Le problème de la duplication du cube colorié

Un problème « classique » consiste à choisir un des trente cubes coloriés comme modèle. En empilant 8 des 29 autres cubes, il faut réaliser un cube dont l'arête est double, dont les faces externes sont coloriées comme le modèle. De plus, il faut que les faces en contact de deux « petits » cubes soient de la même couleur (fig. 3).

En fait c'est un simple problème de visualisation dans l'espace. Choisissons notre modèle, face noire en bas. Il a la face blanche en haut, mettons-le de façon à avoir la rouge derrière, la bleue devant, la verte à droite, la jaune à gauche. Nous devons empiler huit cubes de façon à reconstituer un cube de côté deux fois plus grand, commençons par le bas.

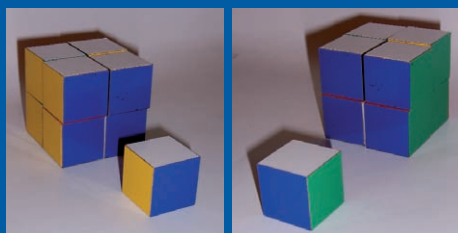
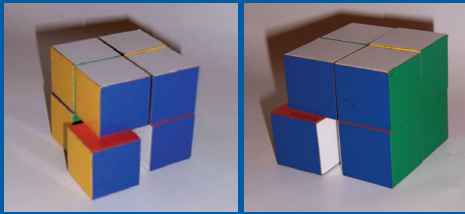


Figure 3

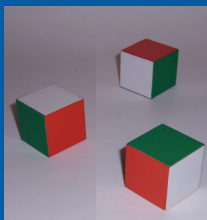
**Le cube qui sert de modèle et le cube dupliqué.**  
(vues montrant la face gauche puis la droite)

Le cube qui est en bas, devant, à gauche (fig. 4) doit avoir la face noire en bas, la face jaune à gauche, la face bleue devant. Sa face blanche ne peut pas être en haut car le cube qui est posé sur lui devrait avoir la face blanche en bas alors que l'on sait qu'il a la face blanche en haut. De même, sa face arrière ne peut pas être rouge car celui qui est derrière lui a déjà sa face rouge derrière. Et sa face droite ne peut être verte puisque le cube situé à sa droite doit avoir la face verte à droite. Il s'agit de mettre sur ses faces haut, arrière et droite les trois couleurs blanc, rouge, vert de façon à ce que haut ne soit pas blanc, arrière ne soit pas rouge et droite ne soit pas vert. Dans l'ordre haut-arrière-droite, il n'y a que deux possibilités : rouge-vert-blanc et vert-blanc-rouge.



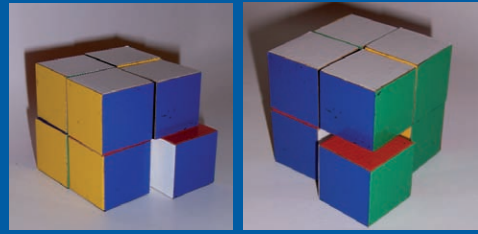
**Figure 4**  
**Le cube situé en bas, devant, à gauche dans le cube dupliqué.**  
(vues montrant la face gauche puis la droite)

Par rapport au modèle, qui a ses faces haut-arrière-droite blanc-rouge-vert, on fait tourner dans cette liste les couleurs d'une place dans un sens ou dans l'autre (blanc devient rouge, qui devient vert et vert devient blanc ou vert devient rouge, qui devient blanc et blanc devient vert). Géométriquement parlant, les trois faces qui ne sont pas immédiatement imposées par la position du cube (en bas, devant, à gauche) sont obtenues en faisant tourner celles du modèle d'un tiers de tour autour d'une diagonale du cube, dans un sens ou dans l'autre (fig. 5).



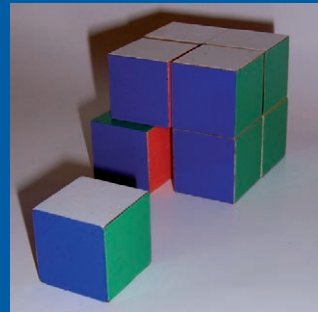
**Figure 5**

A gauche, les faces haut-arrière-droite du modèle vu de dos.  
A droite, les faces haut-arrière-droite du cube situé en bas, devant, à gauche dans le cube dupliqué, obtenues après les avoir fait tourner dans un sens ou dans l'autre.



**Figure 6**  
**Le cube situé en bas, devant et à droite dans le cube dupliqué.**  
(vues montrant la face gauche puis la droite)

Pour le cube qui est en bas, devant, à droite (fig. 6), on l'obtient de même, en faisant pivoter les faces haut, gauche et arrière du modèle. Mais on n'a plus le choix entre deux possibilités car sur les deux, une seule donnera la bonne couleur pour la face en contact avec le premier cube. Le choix que nous faisons pour le premier cube contraint la disposition des couleurs pour le deuxième cube, puis pour le suivant, en contact avec lui et ainsi de suite jusqu'au huitième. Il y a donc seulement deux solutions pour notre problème de duplication du cube coloré, car les cubes sont déterminés par le choix effectué sur le premier (fig. 7).



**Figure 7**  
**L'autre solution au problème de duplication du cube coloré et le modèle.**  
(Vues montrant la face gauche puis la droite.)  
Comparer cette solution avec celle de la figure 4.

P. A.