

NANCY BERTIN  
CAROLINE BULF  
Département de mathématiques  
du Palais de la découverte

FORMES  
MATHÉMATIQUES

## 1/3 ! Mais non.... 1/2 ! Ou alors 1/4 ?

Trois résultats différents  
à un même calcul de probabilité :  
comment est-ce possible ?

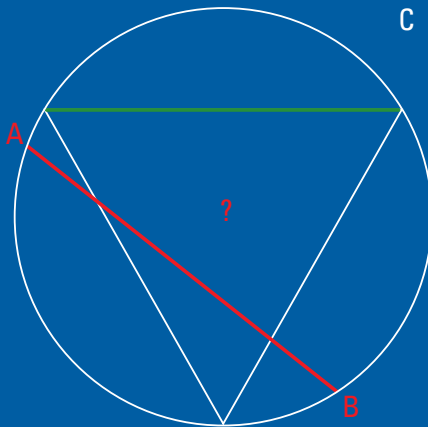


Figure 1

Voici un triangle équilatéral dont les trois sommets sont sur un même cercle C. Si on prend une corde au hasard (une corde est un segment qui relie deux points du cercle), quelle est la probabilité qu'elle soit plus longue que le côté de ce triangle ?

## Promenons-nous sur le cercle

Calculer une probabilité, c'est chercher à compter le nombre de solutions à notre problème parmi tous les cas possibles. Ici, nous allons donc essayer de compter le nombre de cordes plus longues que le côté du triangle parmi toutes les cordes possibles.

Pour simplifier, nous supposons que la direction de la corde reste parallèle à un côté donné du triangle : par exemple, sur la figure 1, nous choisissons le côté horizontal. Les extrémités A et B de la corde sont d'abord confondues avec le point D (fig. 2) puis se promènent sur le cercle parallèlement à ce côté du triangle. Ainsi, la corde, d'abord courte, devient de plus en plus longue. Quand A et B atteignent les sommets du triangle, la corde est alors exactement superposée au côté ; leurs longueurs sont donc les mêmes. Avant cela, toutes les cordes parcourues étaient plus courtes que le côté. À l'arrivée, le point A et le point B ont parcouru chacun  $1/6$  du périmètre du cercle. En effet, si l'on

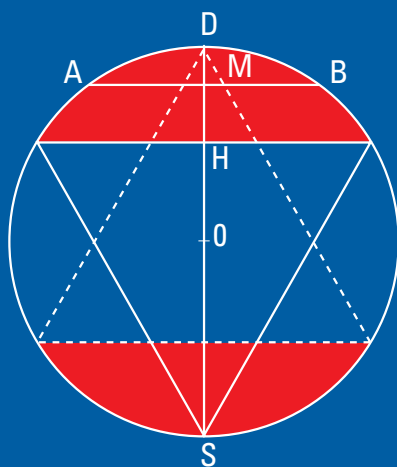


Figure 2  
Les zones en rouge sont celles où la corde [AB] est plus courte que le côté du triangle.

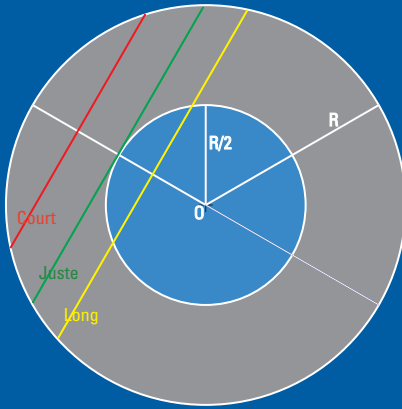
considère un second triangle dont tous les sommets sont diamétralement opposés aux sommets du triangle initial, l'ensemble de ces six points forme un hexagone régulier (fig. 2), dont les sommets délimitent six arcs de cercle de longueurs égales.

Continuons notre chemin : la corde [AB] est désormais plus longue que le côté. Jusqu'à ce qu'elle se superpose, cette fois, au côté horizontal du nouveau triangle. A et B ont cette fois encore parcouru chacun  $1/6$  du périmètre. Pour terminer leur route, A et B finissent de parcourir le  $1/6$  restant, route au cours de laquelle la corde est à nouveau plus petite que le côté.

Au cours de cette promenade, sur la moitié de cercle parcourue par A (ou B),  $1/6$  correspondait à des cordes plus longues que le côté : on pourrait donc en conclure que la probabilité recherchée vaut  $(1/6)/(1/2) = 1/3$ . Surtout qu'on aurait pu faire le même raisonnement en choisissant les cordes dans une autre direction que l'horizontale.

## Pendant ce temps sur le diamètre...

Tandis que A et B se baladent sur le cercle, le milieu M de la corde [AB], lui, parcourt le diamètre vertical du cercle. Quand A et B se retrouvent sur les sommets du triangle, M a parcouru... la moitié du rayon (ce n'est pas évident : si vous voulez en être convaincu, reportez-vous à l'encadré), soit un quart du diamètre ! Ensuite, tandis que A et B rejoignent le côté horizontal du deuxième triangle (la corde est alors plus longue que le côté), M parcourt un quart (jusqu'à O), puis un autre quart du diamètre. Il rejoint enfin S après un dernier quart de diamètre pendant lequel la corde est plus courte. Bilan des courses : pendant la moitié du chemin de M la corde est plus longue, la probabilité recherchée serait donc  $1/2$  ?



**Figure 3**  
Le disque intérieur bleu désigne l'ensemble des centres des cordes plus longues que le côté du triangle.

### Et si on prenait l'aire ?

On vient de voir que si la distance entre le milieu M de la corde et le centre O est inférieure à la moitié du rayon, alors la corde correspondante sera plus grande que le côté. Or, ceci est vrai quelle que soit la direction de la corde autour du centre O. L'ensemble des cordes plus grandes que le côté peut donc être associé à l'ensemble des milieux de ces cordes se situant à une distance inférieure à R/2 du centre O, où R désigne bien sûr le rayon du cercle (fig. 3). Autrement dit, le disque de centre O et de rayon R/2 est l'ensemble des milieux des cordes plus grandes que le côté du triangle. Ce disque a une surface de  $\pi(R/2)^2$ . La surface totale du disque considéré au départ étant de  $\pi R^2$ , la probabilité recherchée serait donc  $\pi(R/2)^2 / \pi R^2 = (R^2/4) / R^2 = 1/4$  ?

### Quel chemin doit-on suivre ?

Dans nos trois démonstrations, nous considérons les mêmes cordes mais suivant notre manière de les compter, nous obtenons trois probabilités différentes. Comment expliquer ce résultat ambigu ? Pour calculer la

probabilité en question, on a estimé le rapport du nombre de cordes plus longues que le côté sur le nombre de cordes possibles. Or ces deux quantités sont infinies. Est-il possible d'évaluer le rapport entre deux quantités infinies ?

En mathématiques, on distingue les probabilités dites « discrètes », qui considèrent un nombre fini de cas possibles, et les probabilités « continues » qui disposent d'outils pour manipuler l'infini. Dans nos trois démonstrations, nous avons considéré un problème continu par nature comme un problème de probabilités discrètes, ce qui nous a conduit à une contradiction. Seuls les outils des probabilités continues pourraient nous amener à la solution avec toute la rigueur nécessaire. La première chose à faire serait d'ailleurs de dire explicitement ce qu'on entend par « prendre une corde au hasard ».

Ce résultat étonnant est connu sous le nom du « paradoxe de Bertrand » dû au mathématicien français Joseph-Louis Bertrand (1822-1900) dont les travaux mathématiques sont variés. Il étudia principalement les équations différentielles en thermodynamique puis s'intéressa plus tardivement aux calculs de probabilités continues.

N. B. et C. B.

#### Pourquoi la longueur DH vaut-elle la moitié du rayon ?

O est à la fois le centre de C et le centre de gravité du triangle équilatéral. Donc, si on appelle H le pied de la hauteur issue de S, O est placé aux 2/3 de la hauteur [SH] à partir du sommet S. Ainsi, on a  $OS = (2/3)SH$  soit  $R = (2/3)SH$  et donc  $SH = (3/2)R$  et DH, la distance parcourue par M, vaut :  $DH = DS - SH = 2R - (3/2)R = R/2$ .