FORMES MATHÉMATIQUES

GUILLAUME REUILLER
Département de mathématiques du Palais de la découverte

Une preuve sans mot

$1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 + \ldots = ?$

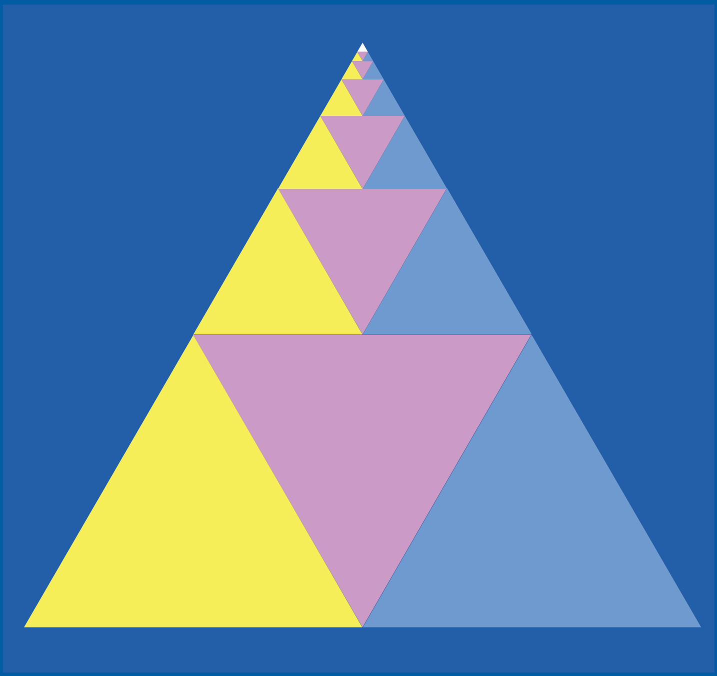

Figure 1

La réponse à cette question est entièrement dévoilée par la figure 1, qui constitue un exemple de ce que les mathématiciens appellent une « preuve sans mot ». C'est la démonstration (fulgurante !) d'un résultat mathématique uniquement par un dessin. Celle-là, en particulier, est due à Rick Mabry.

La preuve par le coloriage

Si, en théorie, la figure 1 est sensée se suffire à elle-même, en pratique, il faut un œil un peu exercé pour y trouver la solution. Donnons donc quelques explications. Et tout d'abord, essayons de comprendre comment est construite cette figure. Pour l'obtenir, il vous faut partir d'un triangle équilatéral (dans notre exemple, sa surface a été coloriée préalablement en rose). Prenez les milieux de chacun de ses côtés et reliez-les deux à deux : vous obtenez un nouveau triangle équilatéral, de côté la moitié de celui de départ (l'application du fameux *théorème de la droite des milieux* suffit à démontrer ce résultat). En fait, vous avez même réalisé un pavage du triangle de départ par quatre triangles équilatéraux identiques. Laissez le triangle central en rose, et coloriez le triangle de droite en bleu et le triangle de gauche en jaune.

Puis recommencez cette construction dans le triangle équilatéral du haut. Autrement dit, reliez les milieux de ses trois côtés pour obtenir quatre triangles équilatéraux (de côté quatre fois plus petit que le triangle initial), et coloriez en jaune celui de gauche, en bleu celui de droite et laissez en rose le triangle central. Vous avez compris : les étapes suivantes consistent à faire la même construction sur les triangles équilatéraux placés en haut dans les pavages successifs. En principe, il faut continuer à l'infini.

Il ne manque pas d'aire

Comment cette construction peut-elle nous aider à trouver la réponse à notre question ? En fait, tout repose sur des calculs d'aires. Fixons l'aire du triangle équilatéral initial comme unité d'aire. Autrement dit, on suppose que l'aire de ce triangle vaut 1. Quelle est alors l'aire des différents triangles coloriés en rose ? Le plus grand a une aire qui vaut 1/4. Celui situé au-dessus a une aire qui vaut le 1/4 du 1/4, soit $(1/4)^2$. De même, celui situé au-dessus a une aire qui vaut le 1/4 du 1/4 du 1/4 soit $(1/4)^3$. La somme « $1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 +\ldots$ » est donc égale à la somme infinie des aires de tous les triangles roses.

Mais on peut dire la même chose de la somme des aires des triangles bleus et de celle des triangles jaunes. Or les triangles roses, jaunes et

$$\frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}$$

$$\frac{1}{4^2} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3}$$

$$\frac{1}{4^3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4}$$

$$\frac{1}{4^4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^5}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{4^{152}} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^{152}} - \frac{1}{4^{153}}$$

$$\frac{1}{4^{153}} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^{153}} - \frac{1}{4^{154}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{4^{n-1}} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{1}{4^{n}}$$

$$\frac{1}{4^{n}} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^{n}} - \frac{1}{4^{n+1}}$$

Figure 2
Démonstration de l'égalité :
$(1 - 1/4) \times [1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 + \ldots + (1/4)^n] = (1/4) - (1/4)^{n+1}$.

bleus recouvrent entièrement le triangle initial. On en déduit donc que $3 \times [1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 +\ldots]$ est égal à 1, et donc que la somme recherchée est égale à 1/3. Génial, non ? C'est probablement la plus belle démonstration de cette formule. Mais ce n'est pas la seule*.

Sans passer par une figure

Pour déterminer cette somme infinie, il est pertinent de commencer par regarder ce qui se passe pour les *sommes partielles*, c'est-à-dire de la forme $1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 +\ldots+ (1/4)^n$, où n est un entier naturel aussi grand que l'on veut. L'astuce consiste alors à multiplier les n termes de cette somme par (1 - 1/4), puis d'additionner les n résultats (fig. 2).

On constate que le calcul se simplifie très facilement puisque, excepté 1/4 et $(1/4)^{n+1}$, chaque puissance de 1/4 se trouve additionnée à son

---

**Ce résultat est extrait du deuxième volume du livre* Proofs without words, *écrit par Roger B. Nelsen en 2000 et publié par* The Mathematical Association of America.

opposé. Reste donc seulement $1/4 - (1/4)^{n+1}$. Finalement, on peut écrire que, pour tout entier naturel n plus grand que 4 :

$$1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 + \ldots + (1/4)^n = [1/4 - (1/4)^{n+1}] / (1 - 1/4).$$

Pour en déduire notre somme infinie, il faut ensuite faire tendre n vers l'infini, c'est-à-dire considérer n de plus en plus grand. 1/4 étant inférieur à 1, $(1/4)^{n+1}$ va alors se rapprocher de plus en plus de zéro. L'égalité précédente devient donc :

$$1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + (1/4)^4 + \ldots + (1/4)^n + \ldots = (1/4) / (1 - 1/4) = (1/4) / (3/4) = 1/3.$$

C'est peut-être moins élégant (quoique…), mais cette méthode a l'avantage de se généraliser à tous les calculs d'une somme infinie de puissances d'un nombre plus petit que 1.

Pour aller plus loin

Le triangle de Sierpinski

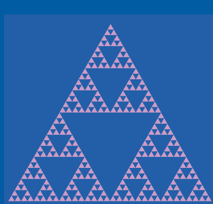

Figure 3
La cinquième étape de construction du triangle de Sierpinski.

La figure 3 est une version inachevée de ce que l'on appelle un *triangle de Sierpinski*, du nom d'un mathématicien polonais du XXe siècle. Au premier coup d'œil, on lui reconnaît un certain air de famille avec la première figure. Normal : les deux figures se construisent d'une manière assez similaire, en pavant des triangles équilatéraux par quatre triangles équilatéraux de côté deux fois plus petit. Sauf que dans le cas du triangle de Sierpinski, vous « enlevez » le triangle central et vous recommencez la construction sur les trois autres triangles. Comme pour la construction précédente, en principe, vous devriez continuer à l'infini (fig. 4).

Quelle est l'aire de ce « triangle » ?

On suppose encore une fois que le triangle de départ a une aire d'une unité. Comme on le voit sur la figure 4, à la première étape, on lui enlève un triangle d'aire ¼. À la deuxième étape, on lui retire trois triangles d'aire 1/4 de 1/4 soit une aire de $3 \times (1/4)^2$. Puis, à la troisième étape, neuf triangles d'aire le 1/4 du 1/4 du 1/4, soit une aire de $3^2 \times (1/4)^3$. Et à la quatrième étape ? Vingt-sept triangles d'aire $(1/4)^4$, soit $3^3 \times (1/4)^4$.

Si l'on continue à l'infini, on a finalement enlevé à l'aire du triangle initial une aire totale de :

$$A = 1/4 + 3 \times (1/4)^2 + 3^2 \times (1/4)^3 + 3^3 \times (1/4)^4 + \ldots + 3^n \times (1/4)^{n+1} + \ldots$$

Cette expression peut s'écrire de manière plus sympathique :

$$A = 1/3 \times [3/4 + (3/4)^2 + (3/4)^3 + (3/4)^4 + \ldots + (3/4)^{n+1} + \ldots].$$

Pourquoi plus sympathique ? Parce que l'on a vu précédemment une méthode permettant de calculer la somme entre crochets. Nous vous laissons le soin de vérifier que cette somme vaut $(3/4) / (1 - 3/4) = (3/4) / (1/4) = 3$. On en déduit que A vaut 1, c'est-à-dire que l'aire de tout ce que l'on a enlevé au triangle initial finit par être égale à l'aire de ce triangle. Conclusion : l'aire de la « dentelle » de Sierpinski est nulle.

G. R.

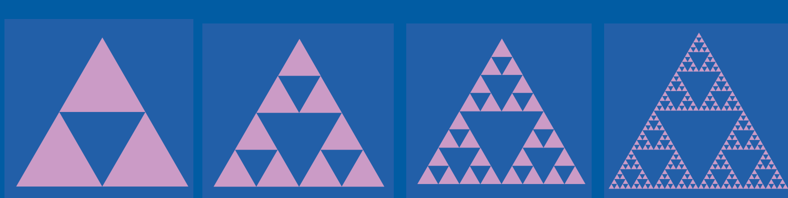

Figure 4
Les quatre premières étapes de la construction du triangle de Sierpinski.