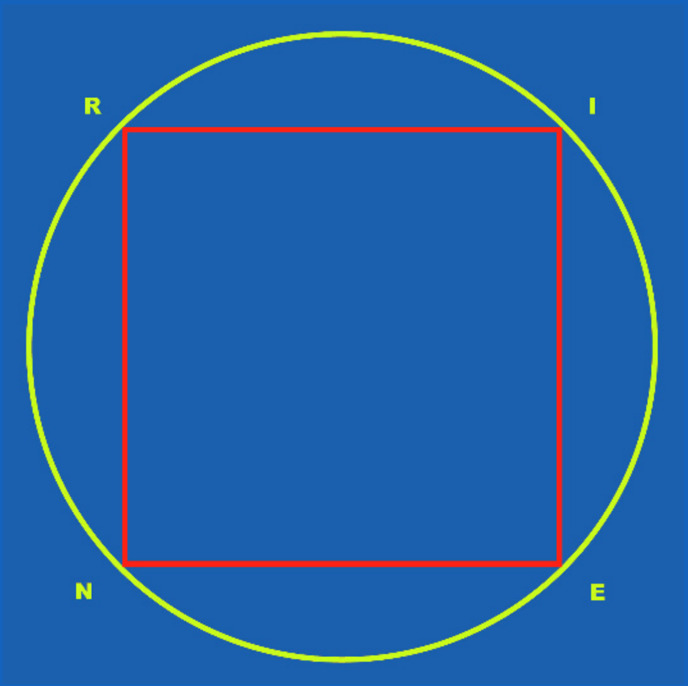
GUILLAUME REUILLER
Département de mathématiques
du Palais de la découverte

FORMES MATHÉMATIQUES

L'aire de RIEN



Les quatre points **R, I, E** et **N** sont des points d'un même cercle et ils forment un carré.
Connaissant le diamètre du cercle, pouvez-vous déterminer l'aire de ce carré ? Attention ! Vous n'avez le droit d'utiliser que la géométrie de la classe de 6^{e} (le théorème de Pythagore est donc exclu).

La duplication du carré

Dans le *Ménon* de Platon, on peut lire un dialogue entre le philosophe Socrate et un esclave. Le premier dessine un carré sur le sable et demande au second de construire un carré dont l'aire est double de celle du premier. Après quelques essais, et guidé par les indications de Socrate, l'esclave finit par... approuver la solution du philosophe.

Doubler le côté du carré n'est pas, de prime abord, une bonne idée, car le carré obtenu a une aire quadruple et non double de celle du carré de départ (fig. 1). En revanche, cela peut amener à trouver la solution. En effet, il suffit d'utiliser le fait que la diagonale d'un carré le divise en deux triangles rectangles d'aires égales. Le tour est joué : dans chacun des quatre carrés identiques au carré initial on trace une diagonale, de telle manière que ces quatre segments forment un carré (fig. 2).

Ce carré a pour aire la moitié de celle du grand carré, soit la moitié de quatre fois le carré de départ, soit deux fois le carré de départ. Dupliquer un carré, c'est donc, par exemple, construire un carré à partir de l'une de ses diagonales.

Les moins étourdis d'entre vous n'ont pas oublié la question de la page précédente, et ils se demandent sûrement quel est le rapport entre cette question et ce qu'ils viennent de lire. On y vient.

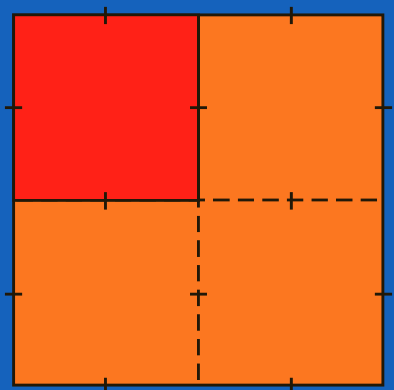


Figure 1
Multiplier par deux le côté d'un carré, c'est multiplier par quatre son aire.

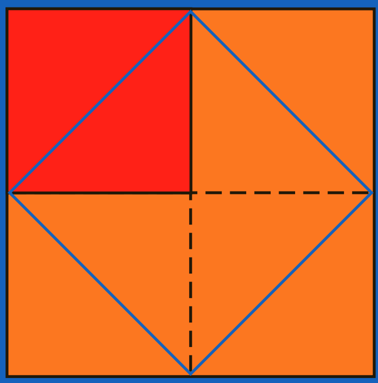


Figure 2
Construction d'un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné.
Le carré bleu contient quatre des huit triangles rectangles identiques qui composent le grand carré. Le carré rouge de départ, lui, en contient deux.

Prenez la tangente

RIEN est le plus grand carré contenu dans le disque (il est unique, à rotation près). En traçant les quatre droites parallèles à ses côtés et tangentes au cercle (c'est-à-dire ayant un unique point commun avec le cercle, on parlait autrefois de « touchantes »), on obtient au contraire le plus petit carré contenant tout le disque, dit *circonscrit* (fig. 3).

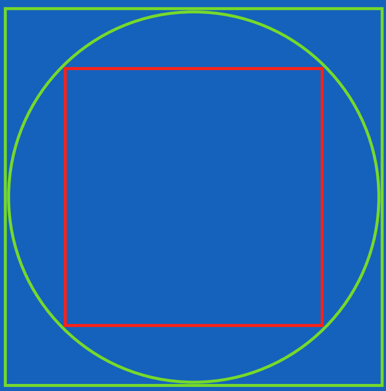


Figure 3
Un carré inscrit et un carré circonscrit à un même cercle.

Pouvez-vous montrer que ce carré a une aire double de celle du carré inscrit ? Il suffit en fait de tourner ce dernier d'un huitième de tour (soit 45°) pour s'en convaincre (fig. 4). Ce faisant, on retombe en effet sur la situation déjà vue précédemment.

Conclure devient un jeu d'enfant : le carré vert a pour côté le diamètre D du cercle. Son aire est donc le carré du diamètre du cercle. Et d'après ce que l'on vient de dire, l'aire du carré rouge est la moitié de celle du vert donc $D^2/2$. En répondant à la question posée, on a trouvé une nouvelle méthode de duplication du carré. Au passage, cela donne une méthode simple pour encadrer (le terme est particulièrement approprié ici, au vu de la figure 3) l'aire d'un disque en utilisant des aires de polygones réguliers (ici, des carrés). Bien sûr, en continuant la construction, c'est-à-dire en inscrivant à chaque étape le carré circonscrit au cercle dans un nouveau cercle, on peut tracer, au bout de k étapes, un carré d'aire 2 k fois plus grande que celle du carré de départ.

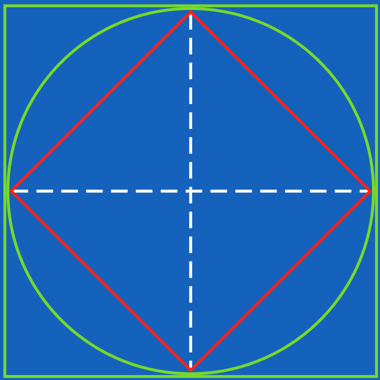


Figure 4
En tournant le carré inscrit d'un huitième de tour, on se ramène à la situation illustrée figure 2.

Pour finir en beauté

Nous venons donc de voir qu'un carré circonscrit à un cercle a une aire double de celle d'un carré inscrit dans ce cercle. Cette propriété se retrouve dans l'architecture du cloître de la cathédrale de Cahors, où la superficie de la cour intérieure est égale à celle du couloir qui l'entoure. Elle est aussi évoquée, par exemple, dans les travaux de Léonard De Vinci, qui la complète en en donnant une autre : si l'on inscrit un cercle dans RIEN, ce dernier délimite une aire qui est la moitié de celle du disque de départ. Et un cercle de centre R passant par I délimite, au contraire, une aire double de celle du disque de départ. À vous de démontrer ces résultats.

Pour terminer, je ne résiste pas à l'envie de vous donner une autre jolie propriété géométrique, qui nécessite de passer à la troisième dimension. Considérons non plus un cercle mais une sphère ; elle est inscrite dans un cube et donc tangente aux six faces de ce cube. Alors, le rapport des volumes de la sphère et du cube est égal à celui de leurs aires. Étonnant, non ? Je savais que cela vous plairait...

G. R.