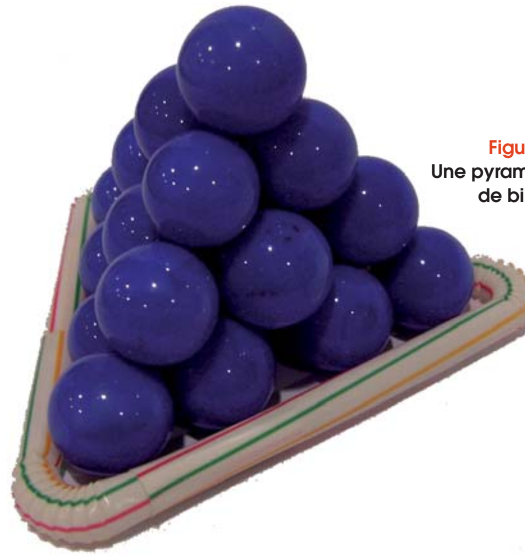


Figure 1
Une pyramide de billes.

Formes mathématiques

Des figures et des nombres

Combien de billes constituent cette pyramide ?

Depuis l'Antiquité grecque au moins, les mathématiciens s'amusent à illustrer (voire justifier) des propriétés arithmétiques par des considérations géométriques. Pour cela, ils associent à des nombres entiers la quantité de points correspondante, et construisent avec ces points une figure géométrique. C'est ce que l'on appelle les *nombres figurés*.

PAR **GUILLAUME REUILLER,** MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Peut-être connaissez-vous la boutade qui consiste à demander à un quidam comment s'y prendre pour construire un carré avec trois allumettes ? La solution consiste à dessiner un 4 : ne dit-on pas que 4 est le « carré » de 2 ? Ainsi, un nombre est *un nombre carré* (ou le carré d'un nombre) si, avec la quantité de points correspondante, on peut construire un carré. Pourquoi s'arrêter là ?

On peut en effet imaginer des nombres *triangulaires* ou encore *pentagonaux, hexagonaux,* etc. Un nombre est triangulaire si, avec la quantité de points correspondante, on peut dessiner un triangle. Par exemple, avec six points je peux dessiner un triangle constitué d'une ligne de trois points surmontée d'une ligne de deux points surmontée d'un point.
En fait, les nombres *triangulaires* sont ceux qui s'obtiennent en ajoutant les premiers nombres entiers : chaque nombre triangulaire est la somme d'entiers successifs de 1 jusqu'à n. Pour passer d'un nombre triangulaire au suivant, on ajoute donc un nombre entier (fig. 2).

DES NOMBRES TRIANGULAIRES...

Si l'on sait seulement passer d'un nombre triangulaire au suivant, calculer le n^e nombre triangulaire suppose de les calculer tous jusqu'au n^e. Mais il y a plus rapide : une petite construction géométrique (fig. 3) nous montre que *tout nombre triangulaire est la moitié du produit de deux entiers successifs*. En effet, avec deux triangles rectangles et isocèles identiques, on peut toujours construire un rectangle, constitué par un nombre de points égal au produit du nombre de lignes par le nombre de colonnes. Le nombre de colonnes étant le nombre de lignes plus un, il est facile de conclure.

Plus précisément, le n^e nombre triangulaire est la moitié du produit du n^e nombre entier par le $(n + 1)^e$.

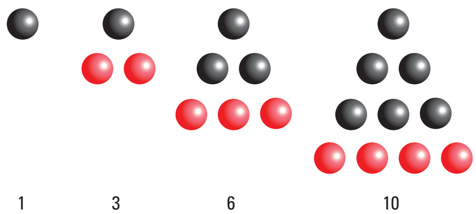


Figure 2
Les quatre premiers nombres triangulaires :
1 ; 3 = 1 + 2 ; 6 = 1 + 2 + 3 = 3 + 3 ; 10 = 1 + 2 + 3 + 4 = 6 + 4.
Pour passer d'un nombre triangulaire au suivant, on lui ajoute un nombre entier.

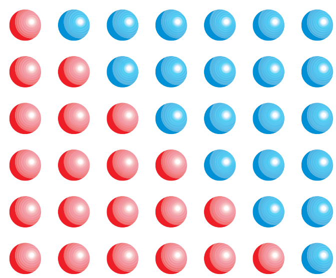


Figure 3
Le 6ᵉ nombre triangulaire vaut la moitié de 6 × 7.
Rectangle obtenu à partir d'un triangle rectangle isocèle constitué de six lignes, respectivement de 1, 2… jusqu'à 6 points (en rouge), accolé à son « double renversé » (en bleu). Le nombre de points de ce rectangle est le produit du nombre de lignes (6) par le nombre de colonnes (6 + 1 = 7), et celui du triangle initial, la moitié de ce produit. Donc 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (6 × 7) / 2 = 21.

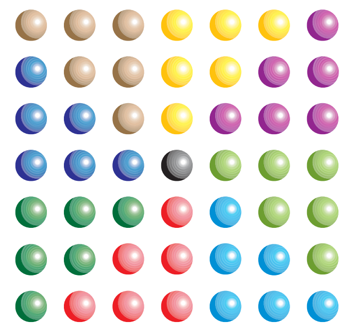


Figure 4
$8 \times (1 + 2 + 3) + 1 = 7^2$.

Figure 5
Pyramide de billes à base triangulaire.
Chaque étage de la pyramide (en bleu, rouge, jaune ou noir) est constitué d'un nombre triangulaire de billes.

Cette propriété permet de calculer directement le n^e nombre triangulaire (encadré *Un défi à lancer à vos amis*). Avant de passer à la dimension supérieure, voici une propriété des nombres triangulaires qui peut s'illustrer d'une jolie manière (fig. 4) : si l'on multiplie un nombre triangulaire par 8 et que l'on ajoute 1 au résultat, on obtient toujours un nombre carré.

… AUX NOMBRES PYRAMIDAUX

Après avoir obtenu les nombres triangulaires comme sommes des premiers nombres entiers, la tentation est grande d'ajouter les nombres triangulaires entre eux. On obtient alors les *nombres tétraédriques* ou *nombres pyramidaux triangulaires*.
En effet, avec les nombres de billes correspondants aux premiers nombres triangulaires, on peut construire les étages successifs d'une pyramide de billes à base triangulaire (fig. 5). Il est donc enfin possible de répondre à la question posée en début d'article !

De même que l'on peut montrer que tout nombre triangulaire est la moitié du produit de deux entiers successifs, on peut démontrer que *tout nombre tétraédrique est le sixième du produit de trois entiers successifs*. Par exemple, on peut ranger la quantité de billes permettant de construire six pyramides comme celle des figures 1 et 5 dans une boîte rectangulaire de dimensions 6 sur 5 sur 4 billes.

Pour aller plus loin

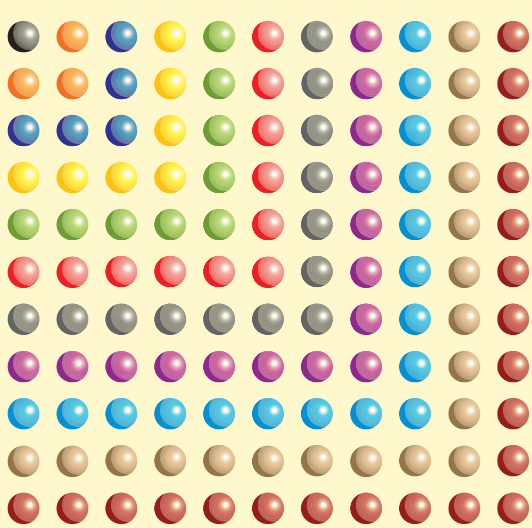
La somme des premiers nombres impairs

Dans ces *Formes mathématiques*, nous avons étudié les sommes des premiers nombres entiers. Que se passe-t-il si, au lieu de les additionner tous, on n'additionne que les nombres impairs ? En s'« amusant » à faire de petits calculs, on peut remarquer que :

$1 = 1^2$
$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$

Cette suite d'égalités laisse supposer que *la somme des premiers nombres impairs est toujours le carré d'un nombre entier,* et que l'on obtient même exactement tous les carrés des nombres entiers naturels. Mais à elle seule, cette suite d'égalités ne prouve rien sinon que ce résultat est vrai pour les sommes des nombres impairs jusqu'à 11.

Figure 6
$1 + 3 + 5 + ... + 21 = 11^2$.



Pour pouvoir affirmer que ce résultat est vrai aussi loin que l'on aille dans l'addition des premiers nombres impairs, il faut fournir une démonstration. Vous vous souvenez peut-être des « identités remarquables » ? Non ? Ce n'est pas grave car il n'est pas difficile de vérifier que pour tout entier n : $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + (2n + 1)$. Avec l'ajout des parenthèses, cette égalité nous montre que pour passer du carré d'un nombre entier n^2 au carré du nombre entier suivant $(n + 1)^2$, il faut ajouter un nombre impair.

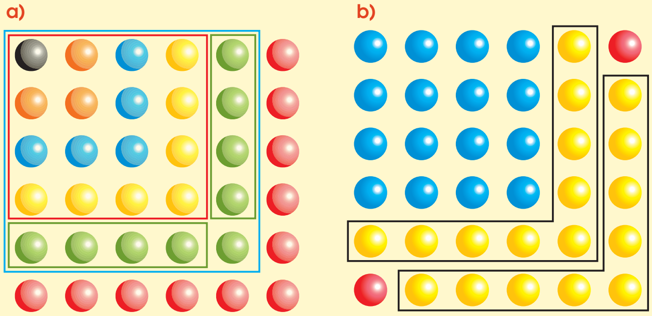
LA PREUVE PAR L'IMAGE

Mais si vous êtes allergique aux formules, pas de panique, la figure 6 permet de comprendre ce résultat sans passer par une formule. Qu'y voit-on (fig. 7a) ? Les points jaunes, bleus, orange et noir forment un carré (de côté $n = 4$). En leur associant un nombre impair $(2n + 1)$ de points verts, on ajoute exactement la quantité de points nécessaire pour construire le carré suivant (de côté $n + 1$). En ajoutant à ce deuxième carré le nombre impair suivant $(2n + 3)$ de points rouges, on construit de nouveau un carré (de côté $n + 2$), etc.
À chaque étape, le nombre de points que l'on ajoute pour passer d'un carré au suivant vaut deux de plus que le précédent (fig. 7b). Puisque l'on part de 1 et que l'on évolue de deux en deux, les nombres de points ajoutés à chaque étape sont bien les nombres impairs successifs.

ALLONS ENCORE (UN PEU) PLUS LOIN

On a d'abord ajouté entre eux les premiers nombres entiers, puis seulement les premiers nombres impairs : *quid* des premiers pairs ? On peut montrer très

Figure 7
Explications de la figure 5.
a)
b)



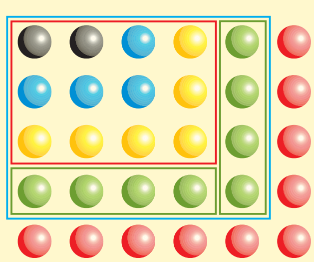


Figure 8
2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5 x 6.
Les points jaunes, bleus et noirs forment un rectangle constitué de 3 × 4 points. En lui ajoutant 8 = 2 × 4 points verts, on obtient un rectangle de 4 × 5 points.

simplement que *la somme des premiers nombres pairs est toujours le produit de deux nombres entiers successifs* (fig. 8). Pour finir en beauté, nous voulions vous montrer un joli résultat témoignant d'un lien inattendu entre la somme des nombres impairs et les nombres cubes, que dévoile la suite d'égalités :

1 = 13
3 + 5 = 8 = 23
7 + 9 + 11 = 27 = 33
13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 43

D'après tout ce que l'on vient de voir, il est légitime de se poser la question suivante : peut-on traduire cette propriété arithmétique par une figure géométrique ? Cela nécessiterait probablement de passer à la troisième dimension en utilisant des cubes de points... **G. R.**

Un défi à lancer à vos amis

Combien la somme des mille premiers nombres entiers vaut-elle ?

Quel est le résultat de la somme 1 + 2 + 3 + ... + 998 + 999 + 1 000 ? (Autrement dit, quel est le 1 000e nombre triangulaire ?)
Voici un exemple de situation où une calculatrice risque de ne pas être d'un grand secours ! Mais en s'inspirant de la méthode proposée dans ces *Formes mathématiques* pour calculer les nombres triangulaires, cela devient un jeu d'enfant. Sur la figure 3, on a associé un point avec six autres points, deux avec cinq, trois avec quatre… pour former six lignes de 7 points.

Faisons de même pour résoudre notre problème. Que vaut la somme du plus petit nombre et du plus grand ?
1 + 1 000 = 1 001. On met 1 et 1 000 de côté. Dans les nombres qui restent, le plus petit est 2 et le plus grand 999. Puisqu'ils valent respectivement un de plus que le plus petit et un de moins que le plus grand, leur somme ne change pas : 2 + 999 = 1 001.
De même : 3 + 998 = 1001, et ainsi de suite… En associant à chaque étape le plus petit nombre restant au plus grand, on obtient à chaque fois une somme égale à 1 001. Combien de fois le fait-on ? 1 000 : 2 = 500 fois.
La somme des nombres entre 1 et 1 000 vaut donc 500 × 1 001, soit 500 500.

Pour finir, voici un nouveau défi : est-il possible de trouver une quantité de points qui permette de former successivement un grand carré puis deux carrés identiques plus petits ?