Formes mathématiques

Des formules dans les formes

Vous êtes-vous déjà demandé comment s'obtenaient les formules de calculs de volumes que l'on trouve, par exemple, dans les formulaires du brevet ou du baccalauréat ? Vous vous doutez qu'elles ne sont pas sorties toutes seules du chapeau : on peut les retrouver à partir de volumes simples et connus. Voici par exemple le cas du volume d'une boule.

PAR **PIERRE AUDIN**, RESPONSABLE DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Figure 1. Le même paquet de cartes, plus ou moins bien empilé, garde le même volume.
© C. Rousselin / Palais de la découverte.

Il est classique d'envisager le calcul d'une longueur en la découpant en plusieurs longueurs faciles à mesurer ou à calculer. De même, il est assez naturel d'évaluer une surface en la découpant en plusieurs morceaux dont on sait déterminer les aires. On peut faire la même chose pour des volumes.

LE PRINCIPE DE CAVALIERI

Plus inhabituelle est l'idée de découper un objet à trois dimensions en surfaces : il est alors nécessaire de prendre des précautions car on se trouve à manipuler des « volumes » d'épaisseurs nulles, qui sont donc forcément en quantité infinie, et il est toujours délicat de manipuler des quantités infinies.

Le « principe de Cavalieri » est pourtant d'une simplicité inouïe : si l'on découpe deux objets par des plans parallèles, et que chacune des sections est de même aire pour les deux objets, alors leurs deux volumes sont égaux. On peut illustrer ce principe avec un jeu de cartes : le jeu, plus ou moins bien empilé sur la table, ne change pas de volume (fig. 1).

Évidemment, le jeu de cartes est seulement une façon de se représenter les choses : même neuves, les cartes ont une épaisseur, alors qu'un plan n'en a pas. On peut battre le jeu de cartes, cela ne changera pas son volume. Si l'on essaie de faire la même chose avec les sections planes d'un objet, on risque d'obtenir une

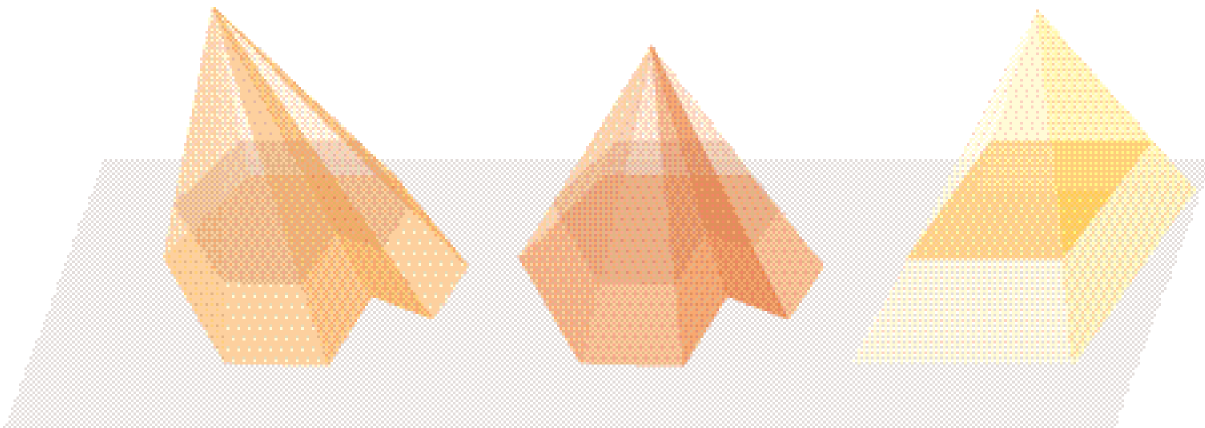


Figure 2. Thalès à l'intérieur des pyramides. Ces trois pyramides ont la même hauteur. Les deux premières ont exactement la même base, mais leur sommet est placé différemment au-dessus de cette base. La troisième est à base carrée, de même aire que la base des deux autres. La section par un même plan parallèle à celui de leurs bases donne simplement une réduction (dans le même rapport) de la base, et l'aire est donc la même pour les sections correspondantes. Le volume des trois pyramides est donc le même, par application du principe de Cavalieri.

réorganisation qui donne un volume différent. C'est ce que nous allons voir dans le cas d'autres volumes.

LE VOLUME D'UNE PYRAMIDE

Le principe de Cavalieri s'applique assez naturellement quand on veut s'assurer que deux pyramides qui ont une base de même aire et la même hauteur sont de même volume : on utilise des plans parallèles à la base. Chacun de ces plans découpe dans la pyramide une forme semblable à celle de la base, ce qui se démontre en appliquant le théorème de Thalès pour chacun des côtés de la forme de base (fig. 2). Chaque plan donne des sections de même aire pour les deux pyramides ; elles ont donc le même volume. Le principe de Cavalieri ne dit pas que les sections planes doivent être nécessairement les mêmes, mais seulement qu'elles doivent avoir la même aire : une pyramide a donc le même volume qu'une pyramide à base carrée, de même aire de base et de même hauteur (fig. 2). Pour obtenir la formule du volume d'une pyramide quelconque, il suffit donc de déterminer celle d'une pyramide à base carrée.

Or, si la hauteur de cette dernière est miraculeusement égale au côté du carré de base, on vérifie (encadré *Une pyramide très particulière*) que le volume de la pyramide est le tiers du produit (aire de base) × hauteur. Si l'on multiplie la hauteur de cette pyramide par un coefficient k, le volume de la pyramide correspondante est multiplié par k. Le volume d'une pyramide de base carrée et de hauteur quelconque H est donc aussi le tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur. Pour une pyramide quelconque, dont la base est d'aire B et la hauteur est H, on obtient la formule classique :

$$\text{Volume} = \frac{B \times H}{3}$$

Évidemment, un cône n'est pas une pyramide, mais on sait depuis Archimède que l'on peut approcher le contour de la base d'un cône, c'est-à-dire un cercle, par des polygones, et donc aussi le cône par des pyramides ; grâce à un passage à la limite, la formule précédente restera donc valable pour déterminer le volume d'un cône.

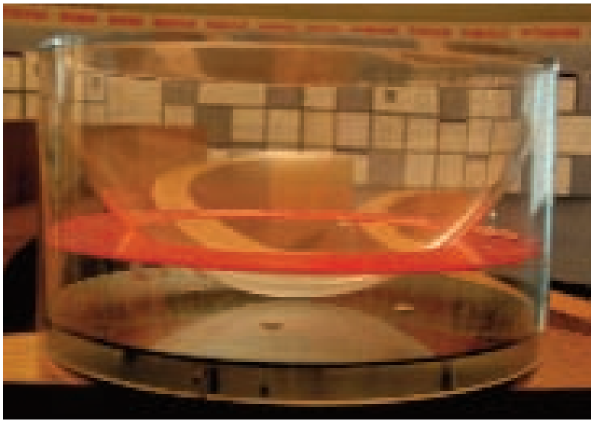


Figure 3. Un plan horizontal et une demi-boule. La demi-boule est contenue dans un cylindre de même rayon, et dont la hauteur est aussi égale au rayon de la demi-boule.

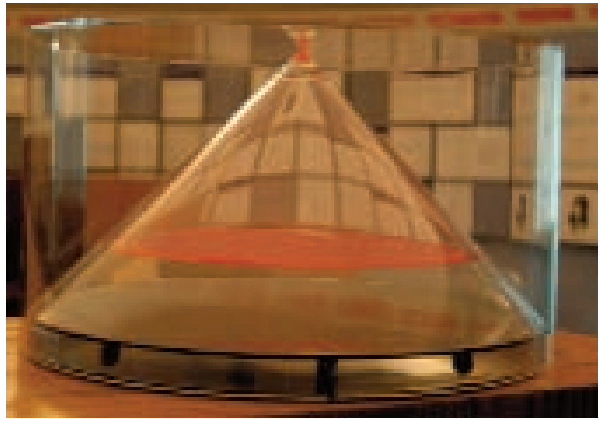


Figure 4. Une section, par le même plan horizontal, d'un cône contenu dans le même cylindre que celui de la figure 3. La hauteur de ce cône est égale au rayon de son disque de base, qui est aussi celui de la demi-boule.

LE VOLUME D'UNE BOULE

Commençons par une idée simple : le volume d'une boule est le double du volume de la demi-boule correspondante. Supposons cette dernière délimitée par un plan horizontal (le plan de l'équateur, en quelque sorte) et située en dessous de ce plan (l'hémisphère sud, donc). Si l'on découpe la demi-boule par des plans horizontaux, dans le but d'appliquer le principe de Cavalieri, on obtient des disques de rayons variés (fig. 3).

Ce serait une mauvaise idée que de se contenter de dire que les rayons de ces disques varient entre 0 et R, car on serait alors tenté de dire que c'est la même chose pour le cône de révolution (fig. 4). Ici aussi, les sections horizontales sont des disques dont les rayons varient entre 0 et R. Mais même en mettant le cône à l'envers, pour les avoir dans le même ordre, le même plan horizontal ne découpe pas la demi-boule et le cône suivant le même cercle : sur les photographies (fig. 3 et 4), les deux surfaces rouges ne sont pas complémentaires, nous allons au contraire vérifier qu'elles sont égales.

DU THÉORÈME DE PYTHAGORE...

Précisément, le théorème de Pythagore nous permet d'évaluer le rayon r de la section horizontale de la boule : si la demi-boule est de rayon R, et si l'on a coupé au niveau z, le théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que $R^2 = z^2 + r^2$ (fig. 5).

De là, on peut déduire la valeur de r, mais en réalité, ce qui nous intéresse, c'est le disque dont l'aire est $? r^2$.

Or, si on multiplie $R^2 = z^2 + r^2$ par ?, on obtient une relation ($? R^2 = ? z^2 + ? r^2$) où l'on reconnaît les aires de trois disques. En effet :

– $? R^2$ est l'aire d'un disque de rayon R, qui est la section horizontale à n'importe quel niveau du cylindre dont la hauteur est R et dont la base circulaire est de rayon R ;

– $? z^2$ est l'aire d'un disque de rayon z, qui est la section horizontale au niveau z du cône dont la hauteur est R et dont la base circulaire est de rayon R (le théorème de Thalès suffit à montrer qu'au niveau z le rayon de ce disque est aussi z)(fig. 6) ;

– $? r^2$ est l'aire d'un disque de rayon r, qui est celui qui nous intéresse : la section horizontale au niveau z de la demi-boule de rayon R. Au niveau z, le disque découpé dans le cylindre se partage en deux éléments : le disque intérieur à la demi-boule et la couronne comprise entre la demi-boule et le cylindre.

Ce que montre le théorème de Pythagore, c'est que cette couronne a la même aire que le disque intérieur au cône (puisque $? z^2 = ? R^2 - ? r^2$).

... AU VOLUME DE LA BOULE

Ainsi, en application du principe de Cavalieri, et puisque c'est vrai à chaque hauteur z, le volume du cylindre est la somme des volumes de la boule et de celui du cône (fig. 5 et 6). On sait calculer le volume du cylindre ((aire de base) × hauteur) et celui du cône (le tiers de (aire de base) × hauteur)… le volume de la demi-boule s'obtient comme différence entre ces deux-là : les deux

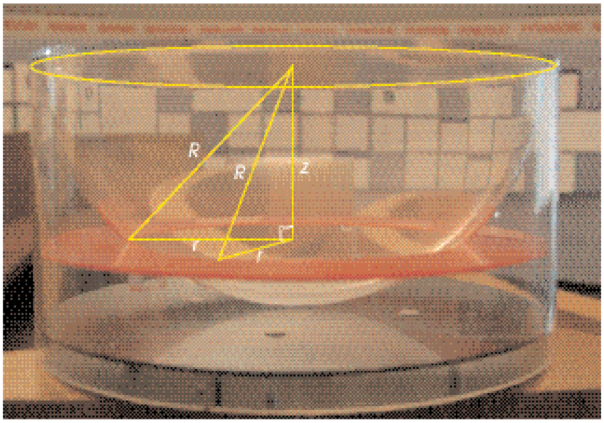


Figure 5. Où l'on utilise le théorème de Pythagore dans la sphère.

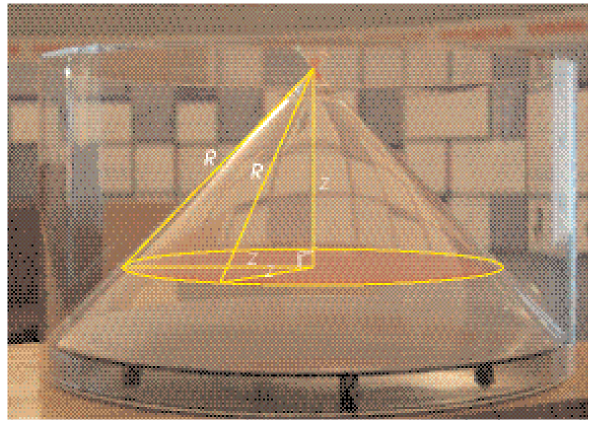


Figure 6. À nouveau, le théorème de pythagore dans le cône.

tiers de (aire de base) × hauteur. La boule en fait deux fois plus, soit les quatre tiers :

$$\text{Volume de la boule de rayon } R = \frac{4}{3}\, pR^3$$

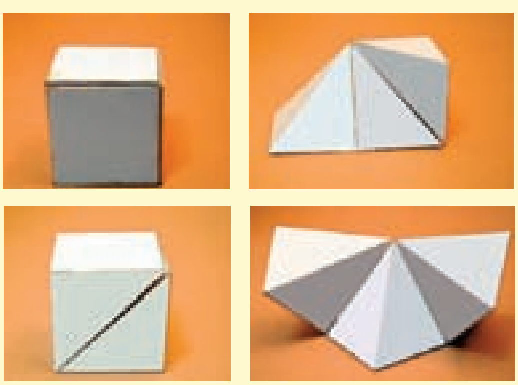
Dans ce cas, comme dans beaucoup d'autres en mathématiques, dès le début du calcul, on trouve le moyen d'interpréter ce que l'on a écrit (le théorème de Pythagore) pour mettre en œuvre d'autres théorèmes (le principe de Cavalieri et les formules donnant les volumes du cylindre et du cône) et obtenir le résultat cherché sans calculs compliqués. Finalement, le seul calcul que l'on a dû mener est une soustraction suivie d'une multiplication par 2. **P. A.**

ERRATUM : dans le n° 354 de la revue *Découverte*, p. 49, il y avait la suite d'égalités suivantes, bien évidemment fausses :

1 = 13
3 + 5 = 8 = 23
7 + 9 + 11 = 27 = 33
13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 43

Il fallait lire en fait :

$1 = 1^3$
$3 + 5 = 8 = 2^3$
$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$
$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$



Quatre vues du partage d'un cube en trois pyramides identiques. © C. Rousselin / Palais de la découverte.

Une pyramide très particulière

On sait bien que le volume d'un cube est… le cube de son arête. Or, il est assez facile de le découper en trois pyramides identiques, qui s'appuient sur les trois faces opposées à un même sommet du cube (figure ci-contre). Ces pyramides ont une base carrée et leur sommet est à la verticale de l'un des coins de cette base. Leur volume est évidemment le tiers de celui du cube, donc le tiers du produit (côté du cube)^2 × (côté du cube). On vient d'illustrer dans un cas très particulier la formule donnant le volume d'une pyramide : le tiers du produit (aire de base) × hauteur. Évidemment, d'après le principe de Cavalieri, cette formule reste vraie si le sommet de la pyramide n'est plus à la verticale d'un sommet de la base.