Formes mathématiques

# La cycloïde ou la Belle Hélène des mathématiques

La cycloïde est une courbe étonnante qui est devenue un grand classique en mathématiques et en mécanique : elle a des propriétés particulièrement jolies, et a posé bien des problèmes à quelques grands scientifiques.

PAR **ROBIN JAMET**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Pour commencer, qu'est-ce qu'une cycloïde ? Il s'agit du trajet décrit dans un plan par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. Pour prendre un exemple concret : c'est la trajectoire d'une tête de clou planté dans le pneu d'un vélo qui avance en ligne droite. On obtient une série d'arches comme celles que l'on voit sur la figure 1.

On peut remarquer que si le vélo avance à une vitesse constante, ce n'est pas le cas du clou : au moment où ce dernier est en contact avec le sol, sa vitesse est nulle (sinon, cela voudrait dire que le vélo dérape ou patine, et l'on n'obtiendrait alors plus une cycloïde). À l'inverse, quand le clou passe au point le plus haut, sa vitesse est maximale : la vitesse de la rotation de la roue s'additionne à celle du vélo.

C'est Galilée (1564-1642) qui a donné son nom à cette courbe en 1599. Le problème qu'il se posa et ne parvint pas à résoudre était de calculer la surface sous une arche de cycloïde. En désespoir de cause, il finit par peser cette surface, et la comparer au poids du disque générateur ; l'arche semblait peser environ trois fois le poids du disque. Mais Galilée rejeta ce résultat : selon lui, le rapport entre les deux ne pouvait être entier… ce en quoi il se trompait (encadré *Pour aller plus loin*) !

## LE CHEMIN LE PLUS COURT N'EST PAS TOUJOURS LE PLUS RAPIDE

La cycloïde est une véritable mine de jolies propriétés. Par exemple, elle est « brachistochrone », mais aussi « isochrone » et « tautochrone » ! Même si l'on comprend vaguement qu'il y a un rapport avec le temps, quelques explications s'imposent…

Imaginons l'expérience suivante : on lâche une bille sur une rampe sans lui donner de vitesse initiale (fig 2). Quelle forme donner à la rampe pour que la bille atteigne le plus vite possible un point plus bas (pas à la verticale, bien sûr) ? Chacun pense tout de suite à la ligne droite : c'est en effet le chemin le plus court reliant les deux points. Mais en ligne droite, la bille ne prendra que peu de vitesse au début.

On peut essayer deux morceaux de droites, le premier plus pentu pour donner à la bille plus de vitesse au début, ou tenter d'incurver plus ou moins la rampe. Il n'est pas si facile de répondre à cette question ! En fait, vous l'avez deviné, le chemin optimal est l'arc de

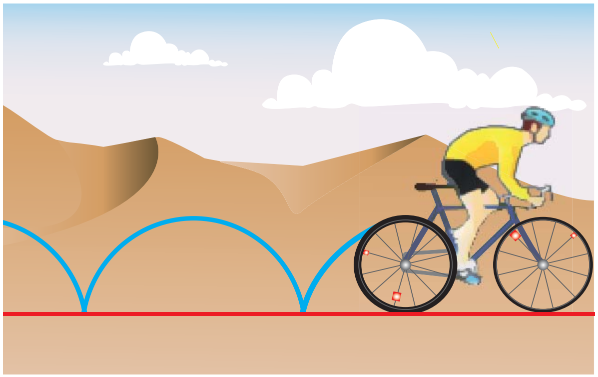

Figure 1. Un point fixé sur une roue de vélo qui roule en ligne droite dessine une courbe appelée cycloïde.

Figure 2. Le chemin le plus rapide. Cette expérience, que vous pouvez retrouver au premier étage du Palais de la découverte, permet de tester trois chemins entre deux points situés à deux altitudes différentes : un segment de droite, une ligne brisée constituée de deux segments de droite et une cycloïde. De ces trois chemins, lequel est le plus rapide ? © G. Reuiller.

cycloïde (à l'envers par rapport au dessin de la figure 1). Ce résultat a été trouvé en même temps par Jean et Jacques Bernoulli, deux mathématiciens qui, bien que frères, étaient brouillés.

Passons à une nouvelle expérience : prenez un pendule qui se balance. Deux facteurs influent sur la durée d'un battement : l'ampleur des balancements et la longueur de la ficelle. Plus les balancements sont amples, plus ils durent longtemps. Plus la ficelle est petite, plus les balancements sont rapides.

On peut donc chercher à obtenir des pendules qui battent toujours à la même cadence, alors que les frottements de l'air font que le pendule monte de moins en moins haut au cours du temps. Pour cela, il suffit de placer des « joues », comme elles sont appelées en horlogerie, sur lesquelles va s'appuyer la ficelle (fig. 3). La partie « libre » de la ficelle est alors plus courte, et donc le balancement plus rapide. En d'autres mots : la longueur de la ficelle diminue en haut d'un balancement ample, ce qui a pour effet de les accélérer, pour qu'ils ne soient pas plus longs qu'un petit balancement.

Quelle forme doit-on donner à ces « joues », pour que le balancement dure toujours exactement le même temps, qu'il soit grand ou petit ? Encore des arcs de cycloïde. Encore plus fort : le trajet suivi par le centre du pendule n'est autre… qu'une cycloïde (fig. 4) ! Cela nous explique la dernière propriété : la cycloïde est tautochrone.

## UNE PROPRIÉTÉ ÉTONNANTE

Si les battements en forme de cycloïde de n'importe quelle amplitude ont la même durée, cela nous fait comprendre immédiatement que quelle que soit l'altitude à laquelle on lâche un pendule ayant des joues en forme de cycloïde, il mettra le même temps pour arriver en bas. Et sa trajectoire est une cycloïde ; donc si l'on reprend notre rampe en forme de cycloïde et que l'on lâche deux balles à un même instant de deux altitudes différentes, elles arriveront au même moment en bas (fig. 5). On peut tester expérimentalement ce résultat en prenant une arche complète de cycloïde, et en lâchant les deux objets de part et d'autre du milieu, à deux hauteurs différentes : ils se cognent toujours au point le plus bas de la courbe.

Tant de propriétés pour un seul objet mathématique ! Cela n'est pas si étonnant : quand une courbe ou un

Pour aller plus loin

# La méthode de Roberval

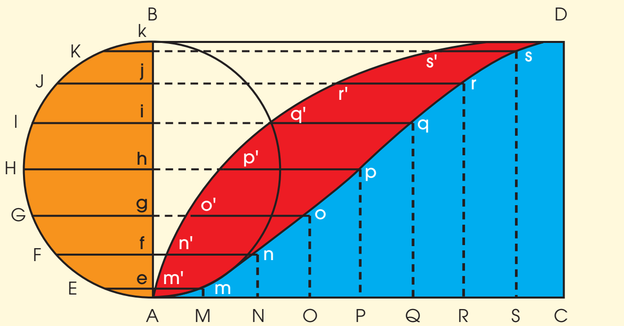


**Figure I.** La méthode de Roberval. Le but est de montrer que l'aire sous la demi-cycloïde vaut une fois et demie l'aire du disque qui l'engendre.

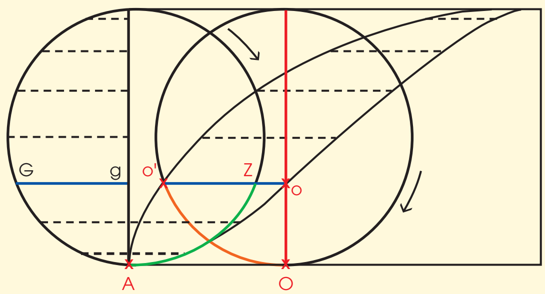


**Figure II.** Quand la roue tourne... Le but est de montrer que les distances Gg et o'o sont égales.

**Pour calculer l'aire de la surface située sous une arche de cycloïde,** Gille Personne de Roberval (1602-1675) se servit du principe des indivisibles de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) (se reporter à « La forme mathématique » du numéro 355 de la revue *Découverte*) : si, quand on coupe deux surfaces planes à une même hauteur, les segments sont toujours de la même taille, alors ces deux surfaces sont égales. Ce résultat est assez intuitif, mais il faudra attendre le calcul différentiel et intégral de Gottfried Leibniz (1646-1716) et Isaac Newton (1643-1727) pour le formuler de façon rigoureuse.

## LA CYCLOÏDE ET SA COMPAGNE

Venons-en à la méthode de Roberval (fig. I). Dans un premier temps, il gradue régulièrement le diamètre vertical du disque qui engendre la cycloïde (les points e, f, g, h, i, j, k). Ensuite, il reporte sur l'axe horizontal les longueurs des arcs de cercle découpés par ces graduations. Ainsi, la distance AM est égale à la longueur de l'arc AE ; MN est égal à la longueur de l'arc EF, etc. Il trace ensuite point par point une courbe, la « compagne » de la cycloïde, en prenant les intersections des graduations verticales et horizontales (les points m, n, o, p, q, r, et s).

On se restreint à la moitié de la cycloïde, c'est-à-dire que l'on s'arrête lorsque le disque a fait un demi-tour. La compagne est parfaitement symétrique par rapport au centre du rectangle ABDC délimité par le diamètre du disque au début et à la fin du mouvement. Donc la surface qui se trouve au-dessous de cette courbe (en bleu) vaut exactement la moitié de la surface du rectangle. Or la largeur du rectangle vaut le diamètre du disque, et sa longueur vaut la moitié du périmètre du disque, puisque l'on s'est arrêté après un demi-tour de ce dernier. La surface du rectangle vaut donc, si le rayon du disque vaut R, $(2 \times R) \times (\pi \times R) = 2 \times \pi \times R^2$. La surface sous la « compagne » vaut $\pi \times R^2$, c'est-à-dire exactement la surface du disque générateur de la cycloïde. Il reste à déterminer la surface comprise entre la cycloïde et sa compagne (en rouge).

## CAVALIERI ENTRE EN SCÈNE

C'est là qu'intervient le principe des indivisibles de Cavalieri : on peut démontrer qu'à n'importe quelle hauteur, la distance horizontale entre la cycloïde et sa compagne est égale à la distance entre le diamètre vertical du disque et son bord. Donc l'aire de la surface rouge est égale à l'aire de la surface

→→→

orange, soit l'aire d'un demi-disque. Précisons un peu : quand le disque tourne (par exemple sur la figure II, son centre est arrivé au-dessus du point O), on peut montrer que oo′ est bien exactement la distance qu'il y a entre le diamètre vertical du disque et son bord à cette altitude, soit gG. Pour s'en convaincre, prenez le point Z à l'intersection de (oo′) et du cercle en position de départ. Quand ce point se trouve sur l'axe horizontal, c'est-à-dire en O, alors le point qui trace la cycloïde (celui qui est en A au départ) se trouve en o′. En effet, les deux arcs de cercle vert et orange sont de même longueur. Pour A et Z, quand l'un est sur l'axe horizontal, l'autre est à la hauteur de l'axe (oo′). Donc la distance entre la projection des deux points sur l'axe horizontal est bien la même dans les deux cas : o'o = gZ = Gg. En se servant du principe des indivisibles de Cavalieri, on en conclut que la surface comprise entre la cycloïde et sa « compagne » vaut exactement la moitié du disque générateur de la cycloïde.

En résumé, la surface comprise sous la moitié de la cycloïde vaut donc celle d'un disque plus celle d'un demi-disque. Donc l'aire sous la cycloïde entière vaut exactement la surface de trois disques générateurs. Ce résultat incroyable de simplicité, Galilée l'avait entrevu, mais refusé : il pensait intuitivement qu'il était impossible que ces deux surfaces soient liées par une relation aussi simple !

Pour visualiser cette méthode, aller jeter un œil sur la page :
**www.palais-decouverte.fr/index.php?id=45**

nombre possède une propriété, elle est généralement liée, de façon visible ou moins visible, à d'autres propriétés. On retrouve ainsi $\pi$ dans de nombreux calculs, parfois apparemment complètement déconnectés du cercle, comme la somme infinie des inverses des carrés des nombres entiers, $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots$ qui vaut $\pi^2/6$. Il en va également de même pour le fameux nombre d'or. Cela a alimenté un mythe à son sujet… qui n'est pas franchement justifié quand on remarque que l'équation qui le définit est particulièrement simple, ce qui explique en soi qu'on le retrouve beaucoup. La cycloïde a tout de même reçu le joli surnom de « Belle Hélène des mathématiques », en référence bien sûr à la Belle Hélène responsable de la guerre de Troie, pas moins ! **R. J.**

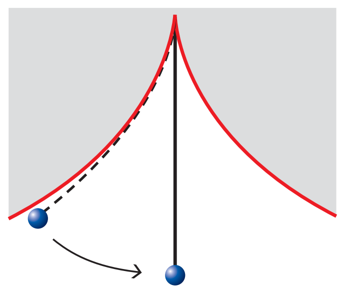

**Figure 3.** En horlogerie, une « joue » a pour effet de compenser le frottement de l'air, et d'assurer ainsi au pendule un mouvement régulier.

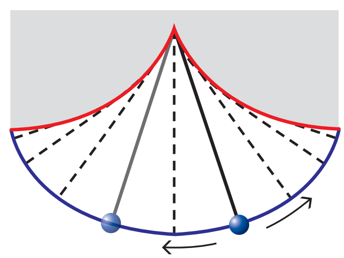

**Figure 4.** Si la « joue » du pendule est une cycloïde, le mouvement du centre du pendule suit également une cycloïde.

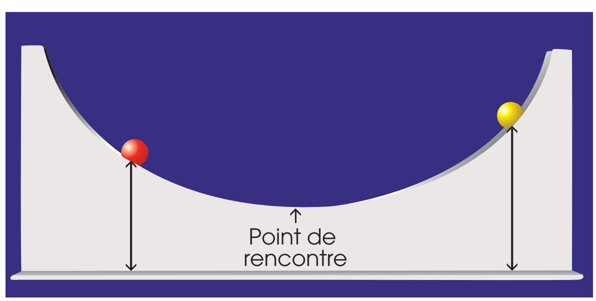


**Figure 5.** Une propriété étonnante. Les deux balles rouge et jaune sont lâchées sur un même arc de cycloïde. Malgré le fait qu'elles soient à des hauteurs très différentes, elles arriveront en même temps au point le plus bas de la cycloïde, qui sera donc toujours leur point de rencontre.