Dessin B. Durand.

Formes mathématiques

La courbe du dragon

Beaucoup d'entre nous se sont amusés, depuis le plus jeune âge, à plier des feuilles de papier. La plupart du temps, sans aboutir à rien. Pourtant, l'un de ces pliages (le plus simple en fait) donne, une fois déplié, un objet mathématique passionnant appelé courbe du dragon, de par son air de ressemblance avec cet animal.

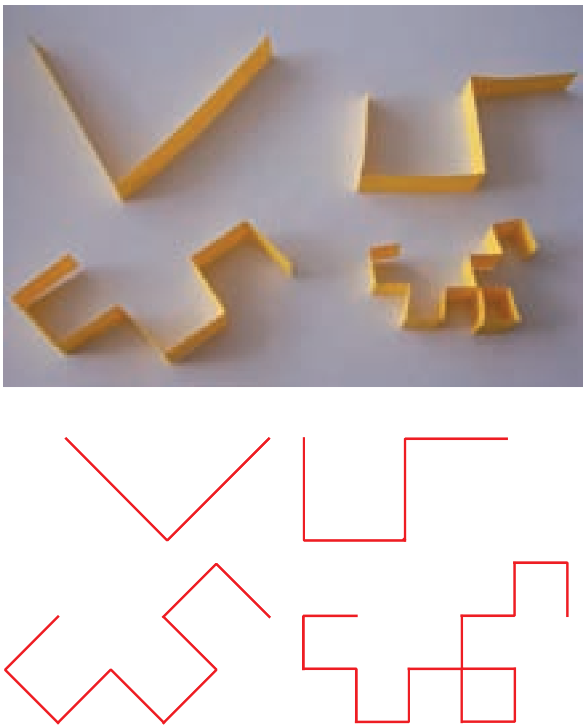
PAR **SUICHEN WANG** ET **MARIE LIN**, ÉLÈVES DE PREMIÈRE S AU LYCÉE LOUISE-MICHEL, BOBIGNY

Plions une bandelette de papier en deux, puis encore en deux, puis encore en deux, autant que possible, *toujours dans le même sens*. Déplions-la, en ne faisant que des angles droits au niveau de chaque pliure, et observons le résultat (fig. 1).

Si nous pouvions aller toujours plus loin, jusqu'à une infinité d'étapes (les mathématiciens ont beaucoup d'imagination...), nous obtiendrions une très belle courbe en dents de scie : la fameuse courbe du dragon. Pour avoir une idée de sa forme, inutile d'aller trop loin : rapidement, les nouvelles pliures sont tellement petites qu'on ne les voit plus (fig. 2) !

À bien y réfléchir, ce dessin est assez surprenant : ce que nous y voyons ressemble à une surface, alors que les premières étapes de construction de la « courbe » du dragon laissaient seulement voir... des courbes. Pour tenter de justifier ce point important, il faut observer que dès la quatrième étape de construction apparaissent des carrés. Et l'on peut montrer (en utilisant des arguments et des résultats développés dans l'encadré *Un dragon ne se recouvre jamais*) qu'après un carré apparaît systématiquement à l'étape suivante une croix selon les diagonales de ce carré (fig. 3). Or la neuvième étape de construction de la courbe du dragon contient un quadrillage de 4 × 4 carrés. Que devient un tel

Figure 1. Les quatre premières étapes de construction d'une courbe du dragon. Sur la photographie, on peut voir les résultats obtenus après un, deux, trois et quatre pliages. En dessous, les courbes correspondantes. Le dessin se rapproche de plus en plus de celui d'un dragon, vous ne trouvez pas ? © G. Reuiller.



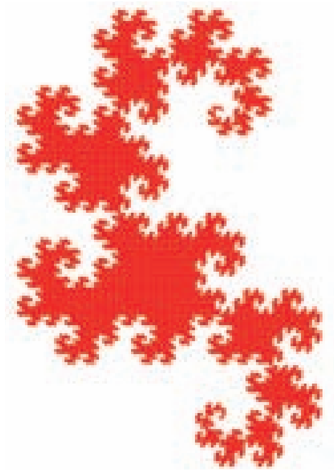


Figure 2. La courbe que l'on obtient après 14 étapes. © R. Férréol, extrait du site www.mathcurve.com

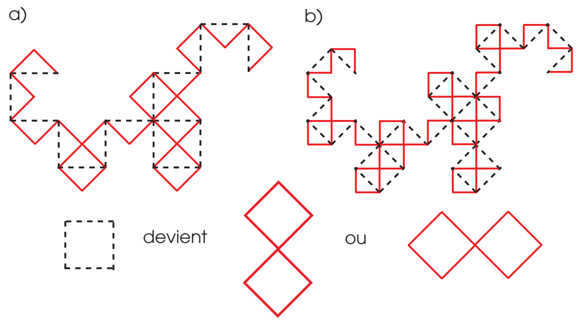


Figure 3. Partout où il y avait un carré, nous trouvons une croix à l'étape suivante. a) Sur ce dessin, on peut voir à la fois la cinquième étape de construction de la courbe du dragon (en rouge) et l'étape précédente (en pointillés). b) Idem pour ce dessin, mais avec la sixième étape de construction de la courbe du dragon. Nous voyons qu'un carré est toujours remplacé par une forme qui contient les diagonales de ce carré.

quadrillage au fil des étapes ? À chaque étape, le quadrillage engendre un nouveau quadrillage, tourné de 45° par rapport au précédent et plus petit (fig. 4). D'étape en étape, le quadrillage se densifie et se resserre avec des carrés de plus en plus petits. Finalement, au bout d'un nombre infini d'étapes, nous pouvons démontrer qu'un carré est totalement recouvert.

QUAND LE DRAGON BÉGAYE

Revenons maintenant à la figure 1 et observons soigneusement les premières étapes de construction de la courbe du dragon. Nous allons noter D_n la courbe obtenue après n étapes de construction. Question : combien de segments composent D_n ? C'est presque évident : à chaque nouveau pliage, nous doublons le nombre de segments qui constituent la courbe. Puisque D_0 n'est constituée que d'un segment, il est clair que D_n est constitué de 2^n segments. Allons un peu plus loin et donnons une propriété importante de la famille des courbes D_n : *D_n est la réunion de deux courbes D_{n-1}*. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que quand on déplie n - 1 fois la feuille de papier pliée n fois, donc avant de déplier le dernier pli, on obtient D_{n-1} en double épaisseur. D_n est donc constituée de deux D_{n-1} tournées à 90° l'une par rapport à l'autre (fig. 5).

Par conséquent, nous pouvons voir aussi D_n comme la réunion de quatre courbes D_{n-2}, ou de huit courbes D_{n-3} ou encore de… 2^k courbes D_{n-k} (pour tout k plus petit que n) ! De plus, nous pouvons montrer que ces courbes ne se recouvrent pas entre elles (Pour aller plus loin, *Un dragon ne se recouvre jamais*). C'est-à-dire qu'à chaque étape n, lors des différents dépliages, un segment ne vient jamais en chevaucher un autre.

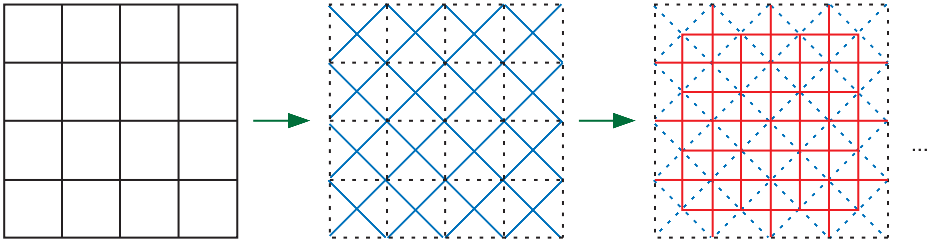
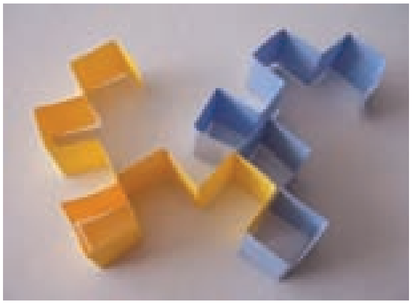


Figure 4. Devenir d'un quadrillage au cours des différentes étapes de construction de la courbe du dragon.



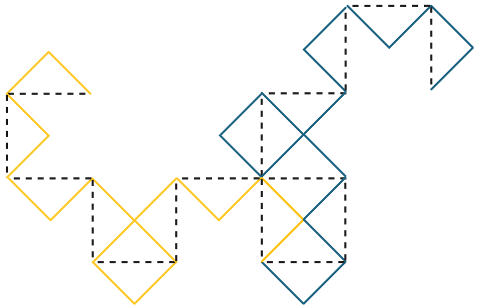


Figure 5. Faites l'expérience suivante : scotcher deux bandelettes de papier, de deux couleurs différentes, l'une dans le prolongement de l'autre. Plier la première sur la seconde au niveau du morceau de Scotch, puis continuer à plier toujours dans le même sens jusqu'à ce que cela ne soit plus possible. Enfin, déplier l'ensemble en ne faisant que des angles droits. La photographie montre le résultat obtenu au bout de cinq pliages. La courbe résultante est la réunion disjointe de deux courbes, chacune s'obtenant après quatre pliages d'une des deux bandelettes. © G. Reuiller.

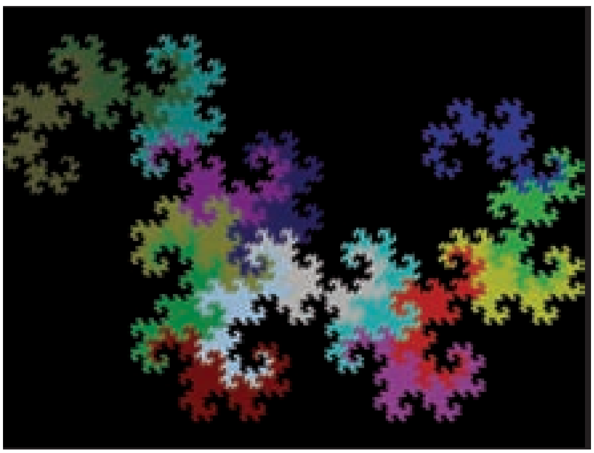


Figure 6. La courbe du dragon est une courbe fractale. Elle est constituée de courbes du dragon plus petites et toutes semblables, elles-mêmes constituées de courbes du dragon encore plus petites et toutes semblables, etc.

© Science Ouverte.

PAVAGES AVEC DES DRAGONS

Résumons-nous : toute courbe D_n peut être vue comme la réunion disjointe d'un certain nombre de courbes D_k, et cela pour tout k plus petit que n. La courbe du dragon est donc la réunion de deux, quatre, huit… ou 2^k courbes du dragon plus petites, toutes exactement les mêmes, et disjointes. Ce qui signifie que, comme dans bien d'autres fractales, on peut retrouver la courbe du dragon en plus petit dans des parties de la courbe entière (fig. 6). Cela signifie aussi qu'avec des courbes du dragon de même taille, nous pouvons en former une aussi grande que nous voulons en les assemblant.

On peut donc coller autant de courbes du dragon que l'on veut les unes aux autres, sans chevauchement ni espace vide entre elles. Cela nous permet de recouvrir un carré aussi grand que l'on veut, puisque plus le dragon est grand, plus le carré qu'il recouvre l'est aussi. On peut donc paver le plan tout entier avec des courbes du dragon de même taille (quelconque) en les emboîtant les unes aux autres sans qu'elles se superposent (comme des carreaux sur un sol ou sur un mur). Il reste à fabriquer des carreaux de faïence de la bonne forme (!) pour faire une jolie salle de bains avec notre animal préféré… **S. W.** et **M. L.**

Pour aller plus loin

La courbe du dragon sous un autre angle

Observons les premières étapes de construction de la courbe du dragon, en nous fixant toujours la même origine. À chaque pli, la courbe tourne soit vers la droite (ce que nous noterons D), soit vers la gauche (ce que nous noterons G). Étudier la séquence des virages obtenus à chaque étape permet de regarder la courbe du dragon sous un nouvel angle, et de donner un nouveau moyen de la construire.

Nous notons V_n la séquence des virages associés à D_n. Elle est constituée d'éléments D et G. Combien y en a-t-il ? Nous avons vu que D_n est formée de 2^n segments. D'après le principe bien connu du nombre de poteaux par rapport au nombre d'intervalles qu'ils délimitent, on conclut que V_n contient $2^n - 1$ virages. Observons les quatre premières séquences de virages (fig. I).

D'abord, ne considérons dans ces séquences que les termes de rang impair (le premier, le troisième, le cinquième, etc.) :

V_1 = D, V_2 = DDG,

V_3 = DDGDDGG,

V_4 = DDGDDGGDDDGGDGG.

Nous remarquons qu'ils sont alternés : un D est suivi d'un G qui est suivi d'un D.

Regardons maintenant les autres termes, c'est-à-dire ceux de rang pair :

V_1 = D, V_2 = DDG, V_3 = DDGDDGG,

V_4 = DDGDDGGDDDGGDGG.

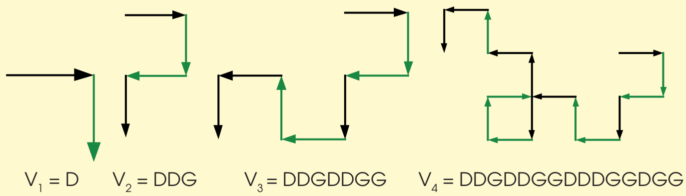


Figure I. Les séquences de virages des quatre premières étapes de construction de la courbe du dragon. En vert, les virages à droite ; en noir, les virages à gauche.

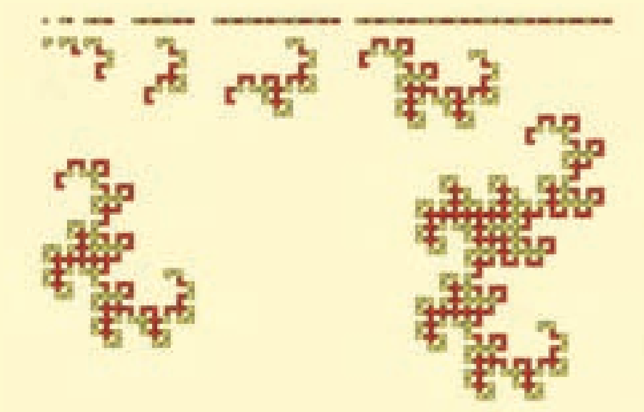


Figure II. Mode d'emploi de construction de la courbe du dragon. En haut, nous avons représenté, pour les six premières étapes, la suite des virages par des carrés alignés jaunes (virages à droite) et rouges (virages à gauche). D'après les deux propriétés données dans ce texte, pour passer d'une étape à la suivante, il suffit d'espacer les carrés d'une unité et de les encadrer par des carrés alternativement jaunes et rouges (suite des virages de rang impair). En bas, nous avons remplacé les carrés par de vrais virages et l'on voit ainsi grandir progressivement le dragon. © Science Ouverte.

Avec un peu plus de difficulté, nous remarquons que le terme pair de V_2 (D) est le seul terme de V_1, que les termes pairs de V_3 (DDG) sont en fait tous les termes de V_2 dans l'ordre et que les termes pairs de V_4 (DDGDDGG) sont tous les termes de V_3.

Une simple observation de ces deux propriétés sur les premières séquences V_n n'est pas suffisante pour affirmer que cette logique continue au-delà de V_4. Mais on peut raisonner par récurrence pour le démontrer (nous avons vérifié que ces propriétés sont vraies jusqu'à V_4, il reste à montrer que si elles sont vraies jusqu'à V_n alors elles sont vraies pour V_{n+1}). Ces deux propriétés donnent un procédé commode de tracé des diverses étapes de construction de la courbe du dragon (fig. II). En effet, pour passer de V_n à V_{n+1}, il suffit d'espacer les éléments de V_n d'une unité et de les encadrer par un D et un G. Une fois les V_n connues, construire les D_n devient un jeu d'enfant !

Pour aller plus loin (suite)

Un dragon ne se recouvre jamais

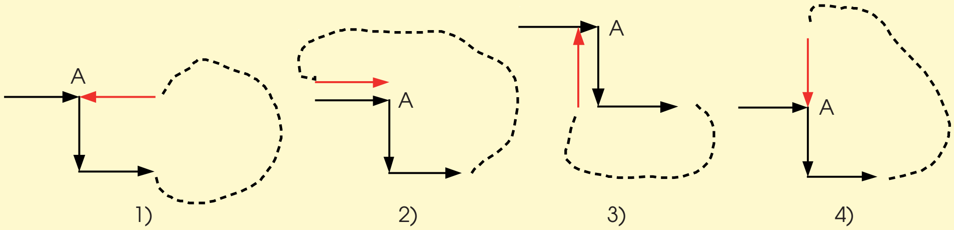
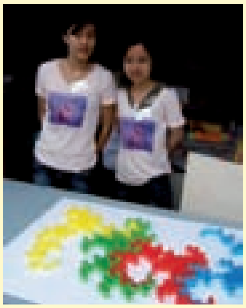


Figure III. Il n'y a que quatre façons pour qu'une courbe revienne à l'un de ses points. En rouge : le deuxième segment qui arrive en A.

Suichen Wang et Marie Lin



© G. Reuiller.

Les deux auteurs de cet article sont élèves en première scientifique au lycée Louise-Michel de Bobigny. Tout au long de l'année, elles ont participé à l'atelier «exploration mathématique» proposé par François Gaudel en partenariat avec l'association Science Ouverte. C'est dans ce cadre qu'elles ont travaillé sur la courbe du dragon, et démontré toutes les propriétés évoquées dans cet article. Elles ont exposé leurs travaux au dernier salon de la Culture et des Jeux mathématiques organisé par le CIJM, où elles ont reçu pour cela le prix André-Parent des lycéens.

Supposons qu'il existe une courbe D_n qui se recouvre, c'est-à-dire dont deux des segments se superposent. Cette courbe revient alors, au moins une fois, à un même point.

Notons A le premier point en lequel cela arrive. La courbe est constituée de segments soit de même direction, soit de directions orthogonales. Par commodité, nous allons les représenter horizontalement ou verticalement et leur donner un sens.

Supposons que le premier segment qui parte de A soit vertical; le premier segment qui y arrive est donc horizontal. Le retour en A ne peut alors se faire que de quatre façons possibles (fig. III).

Pour revenir en A, la courbe doit effectuer autant de pas vers le haut que vers le bas, vers la droite que vers la gauche, donc comporter un nombre pair de segments horizontaux et de segments verticaux.

Par conséquent, le nombre total de segments nécessaires pour revenir en A est pair. Mais les segments verticaux et horizontaux alternent puisque chaque nouveau segment est à 90° du précédent.

Comme le premier segment de la boucle est vertical, nous en déduisons que le dernier est nécessairement horizontal. Nous en concluons que les cas 3) et 4) de la figure III sont impossibles! En conséquence, *un segment ne peut pas revenir perpendiculairement à un autre, et il ne peut y avoir deux segments superposés de directions différentes.* Et deux segments dans la même direction?

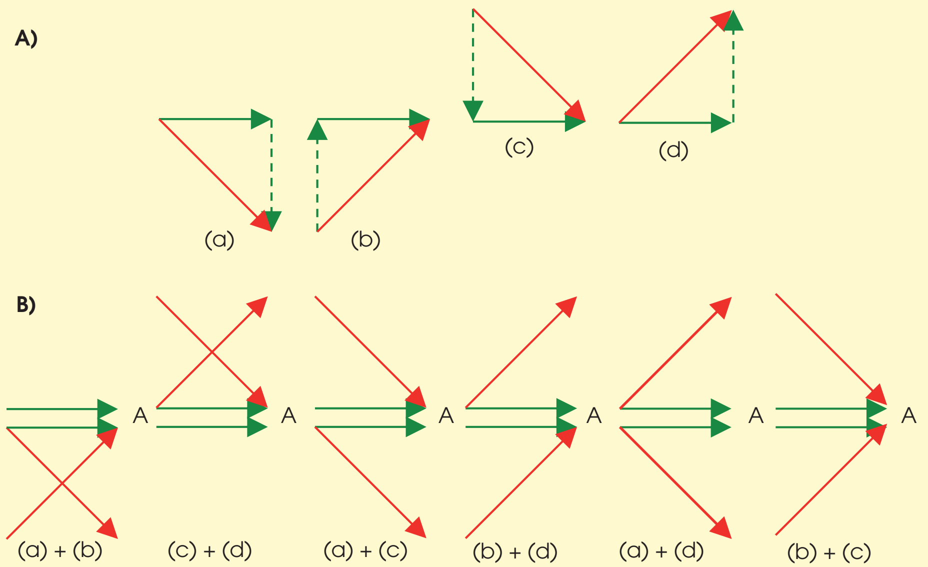
Intéressons-nous maintenant au cas 2), qui suppose que la courbe D_n se recouvre en passant deux fois sur le même segment dans le même sens. Regardons ce qui a pu engendrer une telle situation en remontant à l'étape précédente (fig. IV). Il n'y a que quatre configurations de D_{n-1} qui permettent d'obtenir à l'étape n un segment horizontal orienté vers la droite (fig. IV A). Et il y a seulement six manières différentes d'obtenir deux segments horizontaux superposés orientés vers la droite (fig. IV B). Pourquoi seulement six? Parce que les deux configurations à l'origine des deux segments superposés sont nécessairement différentes. En effet, si la même configuration s'était produite deux fois à l'étape D_{n-1}, cette courbe contiendrait déjà deux segments superposés, donc serait déjà revenue en l'un de ses points avant le point A.

AU CAS PAR CAS...

Analysons maintenant ces six cas. Les deux premiers « (a) + (b) » et « (c) + (d) » sont impossibles car deux segments ne se coupent jamais dans les étapes de construction de la courbe du dragon. Le dernier cas « (b) +(c) » est également impossible car nous avons montré qu'un segment ne peut pas revenir perpendiculairement à un autre. Pour exclure les trois autres, il faut un peu plus se creuser les méninges (fig. V)...

Dans le cas « (a) + (c) », tous les segments de la courbe rouge ne sont pas sur un même « quadrillage », ce qui est impossible. Et pour « (b) + (d) », c'est la même chose. Enfin, pour

Figure IV. **Peut-on obtenir une courbe qui passe deux fois par le même segment dans le même sens ?**
A) Ce premier dessin montre comment obtenir un segment horizontal orienté vers la droite. En vert : les segments de D_n ; en rouge : celui de D_{n-1} qui les a engendrés. B) Ce second dessin montre comment obtenir deux segments horizontaux superposés et tous deux orientés vers la droite, en combinant deux configurations du dessin A).



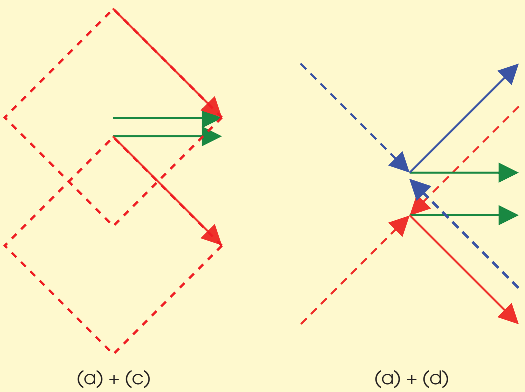


Figure V. **Deux cas récalcitrants...**
Dans le cas « (a) + (c) », les deux segments rouges définissent des maillages différents alors qu'ils appartiennent à la même courbe. Pour le cas « (a) + (d) », nous avons représenté en traits pleins bleu et rouge les segments de D_{n-1} à l'origine des deux segments verts horizontaux, et en traits pointillés bleus et rouges les segments qui les précèdent dans D_{n-1}. Nous constatons que dans tous les cas, un trait pointillé bleu arrive perpendiculairement à un trait pointillé rouge sur le même point.

le cas « (a) + (d) », il faut regarder les segments de D_{n-1} qui sont juste avant ceux qui partent du même point perpendiculairement : quelque soit leur configuration, ils arrivent nécessairement au même point perpendiculairement. Et l'on sait que c'est impossible. En conclusion, *la configuration où deux segments sont orientés dans le même sens et superposés l'un sur l'autre est également impossible.*

Nous avons donc démontré que deux segments d'une courbe D_n ne peuvent se superposer, que ce soit dans la même direction ou pas. Néanmoins, une telle courbe peut-elle repasser par un même point ? La réponse est oui, car le cas 1 (où les deux segments se rencontrent de face) est possible : nous l'observons dès la quatrième étape de construction de la courbe du dragon.
S. W. et **M. L.**