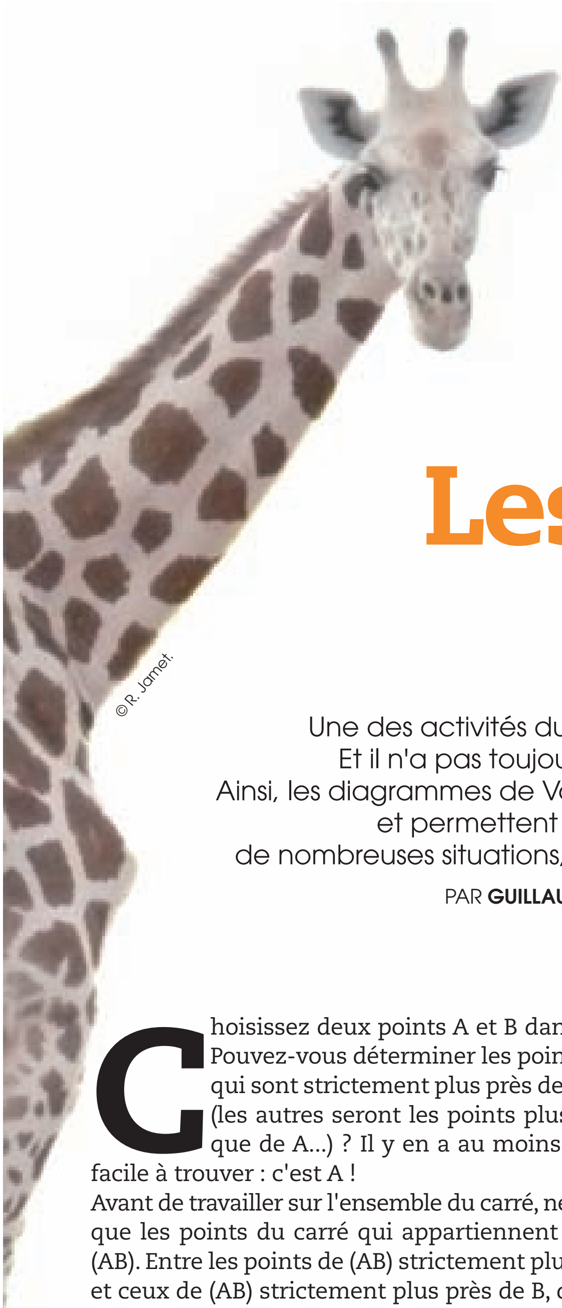
© R. Jamet.

Formes mathématiques

Les diagrammes de Voronoï

Une des activités du mathématicien est de modéliser le monde qui l'entoure. Et il n'a pas toujours besoin pour cela d'outils mathématiques très élaborés. Ainsi, les diagrammes de Voronoï se composent d'objets géométriques élémentaires et permettent néanmoins de construire un modèle qui décrit assez bien de nombreuses situations, allant d'un réseau téléphonique au pelage d'une girafe.

PAR **GUILLAUME REUILLER**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Choisissez deux points A et B dans un carré. Pouvez-vous déterminer les points du carré qui sont strictement plus près de A que de B (les autres seront les points plus près de B que de A…) ? Il y en a au moins un qui est facile à trouver : c'est A !
Avant de travailler sur l'ensemble du carré, ne regardons que les points du carré qui appartiennent à la droite (AB). Entre les points de (AB) strictement plus près de A et ceux de (AB) strictement plus près de B, qu'y a-t-il ? Le point de (AB) aussi près de A que de B, c'est-à-dire le milieu M du segment [AB]. Les points les plus proches de A sont alors sur la demi-droite d'extrémité M et qui contient A ; et la demi-droite d'extrémité M contenant B contient aussi tous les points de (AB) plus proches de B que de A (fig. 1).

Pour l'ensemble du carré, c'est (presque) aussi simple : les points à égale distance de A et de B établissent une frontière entre ceux qui sont plus près de A et ceux qui sont plus près de B. Vous le savez peut être : les points équidistants de deux points A et B du plan forment ce que l'on appelle une médiatrice, et l'on démontre que c'est aussi la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de [AB]. La construire permet de répondre à la question posée (fig. 2).

DES POINTS EN PLUS

Et si l'on ajoute un point C ? Il faut alors tracer les trois médiatrices de [AB], [BC] et [AC] (fig. 3a). Au passage, notez qu'elles se coupent nécessairement en un même point. Les points strictement plus proches de B que de A ou C sont, parmi les points plus proches de B que de A (dans la zone rouge sur la figure), ceux qui sont aussi plus proches de B que de C (ceux qui ne sont pas dans la zone hachurée en jaune). Ils appartiennent donc à l'intersection de deux demi-plans : les points à l'est de la médiatrice de [AB] et au nord de la médiatrice de [BC]. Faites le même raisonnement pour les points plus proches de A (ou C) que des deux autres : vous obtiendrez une partition du carré en trois zones de « proximité » des points A, B et C (fig. 3b).

Il est évident que les choses vont vite se compliquer quand le nombre de points considérés va augmenter

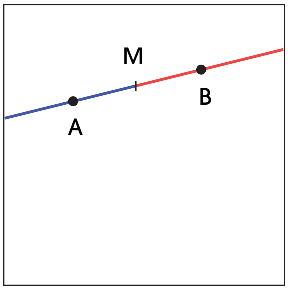

Figure 1. M, le milieu de (AB), est aussi proche de A que de B. Les points en bleu sont plus proches de A que de B, au contraire des points en rouge.

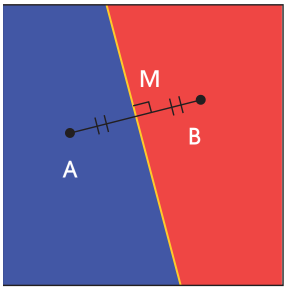

Figure 2. Construction d'un diagramme de Voronoï de 2 points. Dans la zone bleue : les points du carré plus proches de A que de B ; en rouge ceux qui sont plus près de B que de A. La frontière entre les deux est la médiatrice de (AB), soit la perpendiculaire à (AB) passant par M.

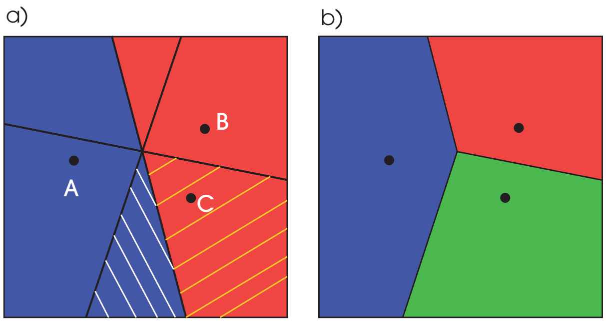

Figure 3. Construction d'un diagramme de Voronoï de 3 points. Chaque zone de couleur correspond à un ensemble de points plus près d'un des trois points que des deux autres. Les frontières entre ces zones sont sur les trois médiatrices du triangle ABC.

(fig.4)... Mais il existe des algorithmes de calcul qui permettent de le faire pour un nombre quelconque de points du plan (par exemple celui de Steven Fortune, qui date de 1986). Les différentes zones obtenues s'appellent des « cellules de Voronoï », et l'ensemble de ces cellules est un « diagramme de Voronoï ». Les propriétés de ces diagrammes, ainsi que les algorithmes mis en œuvre pour les construire, restent encore l'un des principaux sujets d'étude d'une discipline au carrefour des mathématiques et de l'informatique : la géométrie algorithmique.

MAIS À QUOI CELA PEUT-IL BIEN SERVIR ?

Inutile de trouver une utilité à ces diagrammes pour les construire : il suffit de les trouver esthétiques. C'est ce que pense en tout cas le designer australien Marc Newson qui, en ne gardant que les frontières des cellules de Voronoï de plusieurs points d'un bloc de marbre en a fait une bibliothèque (fig. 5), pas forcément très pratique à remplir d'ailleurs... On peut aussi transformer la construction de diagrammes de Voronoï en un jeu (encadré *Des mathématiques au jeu*).

Mais, en plus d'être jolis et ludiques, les diagrammes de Voronoï se révèlent être un modèle intéressant pour de nombreuses situations diverses et variées (encadré *Pour la petite histoire...*). Par exemple : pour le placement des antennes-relais des réseaux de téléphonie mobile. Quand vous passez un appel sur votre portable, votre communication passe par la station la plus proche de l'endroit où vous êtes, qui la transmet à la station la plus proche de votre interlocuteur. Du moins en théorie. Établir le diagramme de Voronoï des stations de relais, c'est donc modéliser les zones géographiques associées à chaque station.

DU TÉLÉPHONE PORTABLE AUX GIRAFES

Autre exemple, issu de la biologie cette fois. Si l'on place plusieurs bactéries différentes sur une surface nutritive, elles vont croître chacune de leur côté à partir de leur position de départ. Cette croissance va s'arrêter quand deux populations de bactéries différentes vont se rejoindre. Or, si la vitesse de croissance de chacune des bactéries est la même, c'est à égale distance de leurs

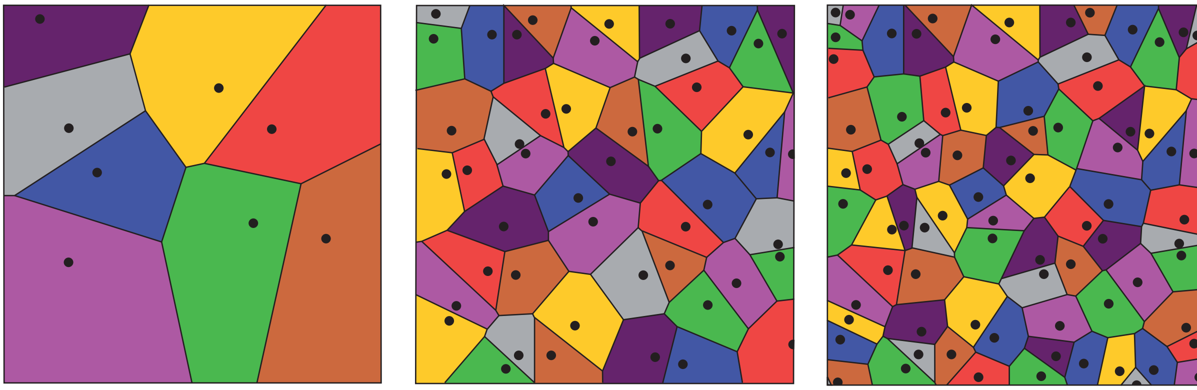

Figure 4. Diagrammes de Voronoï de 8, 48 et 80 points.
Chaque zone de couleur correspond à l'ensemble des points plus proches du point noir contenu dans cette zone que de tous les autres points noirs.

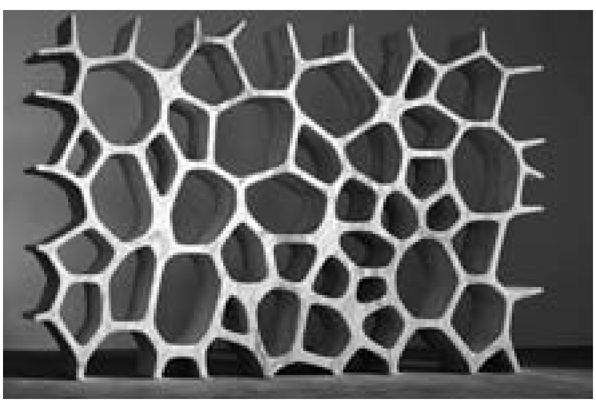

Figure 5. « Voronoi Marble Bookcase » de Marc Newson.
Cette bibliothèque est construite à partir d'un seul bloc de marbre. On y voit les cellules de Voronoï d'une soixantaine de points choisis dans un rectangle.
Avec l'aimable autorisation de la Gagosian Gallery, New York 2007 / M. Newson Ltd / Lamay Photo.

points de départ qu'elles vont se retrouver. Les populations de bactéries vont alors se répartir suivant un diagramme de Voronoï. Le même genre de phénomène est à l'œuvre lors de la formation des dessins du pelage des girafes (fig. 6). Les taches sont liées à la présence de cellules productrices de mélanine. Elles s'étendent jusqu'à rencontrer une tache voisine, ce qui se produit à égale distance des points d'origine des taches.
Bien sûr, rien ne nous oblige à nous limiter au plan : nous pouvons aussi construire des diagrammes de Voronoï dans l'espace, en remplaçant les médiatrices par des plans médiateurs. Les diagrammes de Voronoï en 3D offrent également de bonnes modélisations, par exemple pour décrire les structures des protéines ou des cristaux. À ce sujet, voyez-vous comment placer sept points dans l'espace pour que la cellule de Voronoï de l'un d'entre eux soit un cube ?

MODÉLISER, C'EST SIMPLIFIER

Pour terminer, revenons un instant sur l'exemple des girafes. Si nous y regardons de plus près (fig. 7), nous constatons d'abord que les contours des taches sur le pelage des girafes ne sont pas nets, et les taches ne forment donc pas exactement des polygones comme les cellules de Voronoï. Ensuite, et surtout, nous voyons un certain nombre de traits blancs qui sont à l'intérieur d'une tache sans constituer une réelle frontière entre deux taches. Cela ressemble à deux taches qui auraient « fusionné » pour n'en faire qu'une, en débordant en partie sur leur frontière commune.
Bref, ce qu'il faut en retenir, c'est que les diagrammes de Voronoï ne constituent qu'un modèle, une première approche, et ne permettent pas de décrire avec une très grande précision le pelage de n'importe quelle girafe, quel que soit son sexe ou son âge. Modéliser, c'est simplifier. Quitte à perdre de l'information en route. Cela reste malgré tout une façon bien utile et pertinente de comprendre un phénomène. **G. R.**

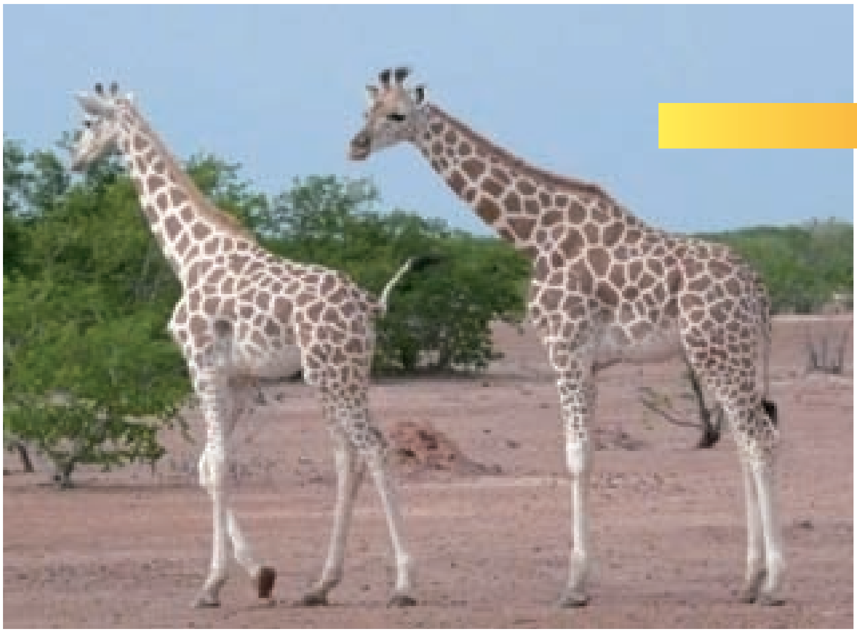

Figure 6. Des girafes de Kouré (Niger).
Les diagrammes de Voronoï semblent offrir un modèle pertinent pour décrire la répartition des taches sur le pelage des girafes. © R. Jamet.

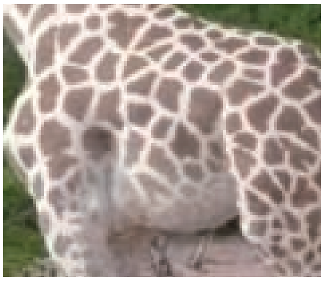

Figure 7. Zoom sur la photographie précédente. © R. Jamet.

Des mathématiques au jeu

Deux ingénieurs (Chris Poultney et Monty Faidley) et un enseignant chercheur (Dennis Shasha) ont eu l'idée d'utiliser un algorithme qui construit des diagrammes de Voronoï pour un nombre relativement restreint de points, afin d'en faire un jeu. Ce jeu peut se jouer seul (contre l'ordinateur) ou à plusieurs. Chaque joueur place, à tour de rôle, un point dans un carré. Les points du carré plus proches de ce point que de tout autre point déjà placé sont « annexés » par le joueur en question. Le but du jeu est de terminer avec le « territoire » le plus grand après avoir placé au maximum 15 points. Mais le mieux est d'essayer : allez jouer sur http://interstices.info/jcms/c_24839/jouez-avec-les-diagrammes-de-voronoi. Immanquablement, vous allez vous demander quelle est la meilleure stratégie à mettre en œuvre pour gagner. Or, si les règles du jeu sont extrêmement simples, répondre à cette question est beaucoup plus compliqué…

Pour la petite histoire…

2008 est le centième anniversaire de la mort du mathématicien ukrainien Georgi Fedoseevich Voronoï (1868-1908), qui a donné son nom aux diagrammes dont il est question dans cet article. Cela pourrait vous laissez supposer qu'il est le premier à avoir introduit cette notion… Pas du tout : d'autres scientifiques l'avaient fait avant lui, comme le mathématicien français Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) en 1850. Les diagrammes de Voronoï sont d'ailleurs aussi parfois appelés « tessellations de Dirichlet ».
En 1854, le médecin britannique John Snow (1813-1858) recherchait l'origine d'une épidémie de choléra qui décimait la population de Soho, un quartier londonien. Son hypothèse était que la transmission de cette maladie se faisait par le réseau de distribution de l'eau. Il a alors établi le diagramme « de Voronoï » des pompes du quartier et a constaté que les personnes atteintes se trouvaient en majorité plus près de la pompe de Broad Street que de n'importe quelle autre pompe. Il en a déduit que cette dernière était probablement la source d'infection, ce qui s'est révélé exact.