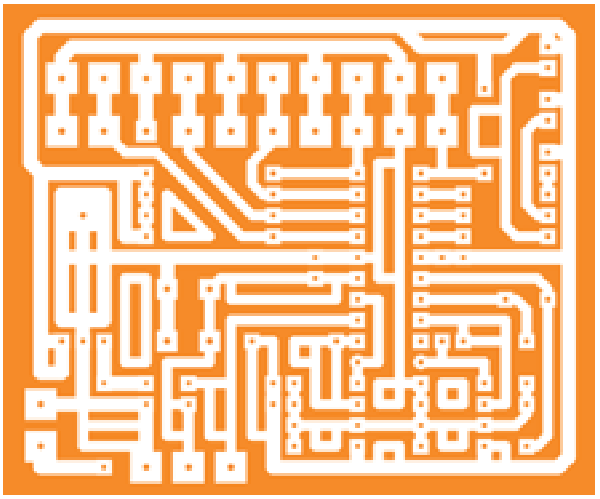

Exemple de schéma de circuit imprimé.
(c) P. Col /http://col2000.free.fr/index.htm#copieur

Formes mathématiques
Rien que des lignes et des points...

Des points reliés entre eux par des lignes : rien de plus simple me direz-vous ? Et pourtant, cela suffit pour constituer un très riche sujet d'étude pour les mathématiciens. Savoir si une figure donnée peut être modifiée pour qu'aucun trait n'en croise un autre est un exemple des questions qu'ils peuvent se poser. Voici, en quelques lignes, un point sur ce sujet.

PAR **GUILLAUME REUILLER,** MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Commençons par des questions, en espérant que vous prendrez le temps d'y réfléchir avant de lire la suite...

Énigme n°1

Pouvez-vous placer quatre points de telle manière que :
- chacun soit relié aux trois autres par un trait,
- jamais deux traits ne se croisent (en dehors de ces quatre points) ?

Énigme n°2

Pouvez-vous placer cinq points de la même manière ?

Énigme n°3

Pouvez-vous placer trois points rouges et trois points verts tels que chaque point rouge soit relié aux trois points verts par un trait, sans que les traits tracés ne se croisent (en dehors de leurs extrémités) ?

Disons-le tout net : ces énigmes sont assez mal posées, car il n'est pas précisé si l'on doit travailler dans le plan ou dans l'espace. Or, dans l'espace, la réponse à ces trois questions est bien évidemment positive (fig. 1). Par exemple, pour l'énigme n°1, il suffit de construire une pyramide à base triangulaire, c'est-à-dire un tétraèdre. Si l'on s'oblige à rester dans le plan, ces énigmes deviennent franchement plus intéressantes...

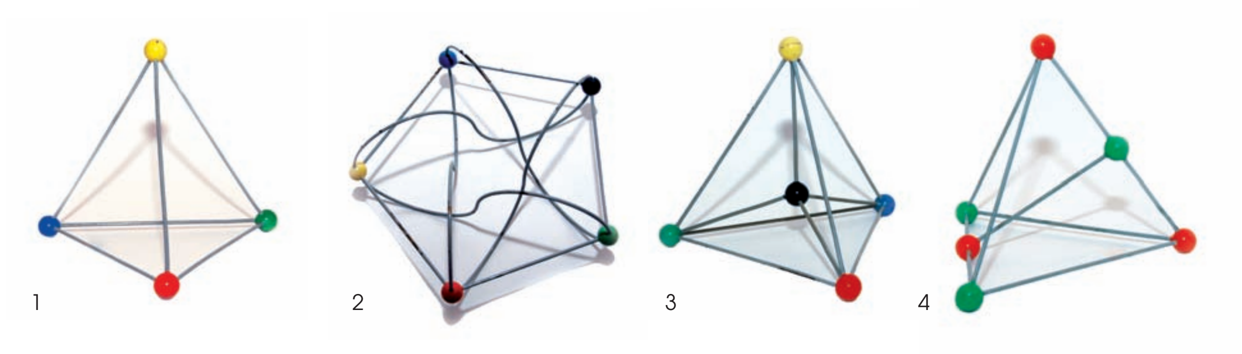

Figure 1. Les solutions aux trois énigmes… dans l'espace. Sur les trois premières photographies, chaque boule de couleur est reliée aux autres par une tige, et cela sans que les tiges ne se croisent (en dehors des boules). Ces objets constituent donc des solutions aux deux premières énigmes. Pour le dernier objet, chaque boule rouge est reliée aux trois boules vertes, encore une fois sans que les tiges ne se croisent.

ET DANS LE PLAN ?

La première énigme devient alors : « Comment relier deux à deux quatre points du plan sans que les traits ne se croisent (sous-entendu : en dehors des quatre points) ? » Ainsi posée, elle correspond à trois contraintes : il faut relier les points deux à deux, que les traits ne se croisent pas et que les quatre points et les traits soient dans le même plan. Une méthode fréquente utilisée par les mathématiciens pour résoudre un problème à contraintes multiples est de trouver d'abord une ébauche de solution, qui respecte toutes les contraintes sauf une. Le tétraèdre nous offre une telle ébauche : seule la contrainte de planarité n'est pas respectée.
Comment alors passer du tétraèdre à la solution dans le plan ? En « écrasant » l'un des sommets de la pyramide sur la face constituée par les trois autres (fig. 2).
Une autre méthode consiste à dessiner dans le plan une figure, très simple à obtenir, où les quatre points sont reliés deux à deux, mais où des traits se croisent (fig. 3a). Ensuite, il suffit seulement de déplacer un des points (le jaune sur la figure) à l'intérieur du triangle formé par les trois autres. Naturellement, il faut que les traits reliés au point jaune (numérotés 1, 2 et 3) bougent avec lui.

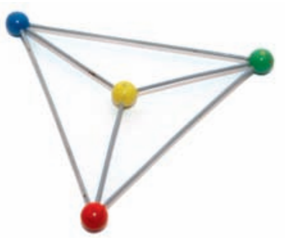

Figure 2. Du tétraèdre à la solution de l'énigme n°1.

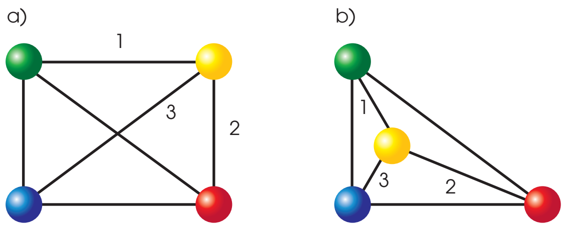

Figure 3. Du rectangle à la solution de l'énigme n°1. En déplaçant le point jaune, avec les trois chemins 1, 2 et 3 qui lui sont liés, vous pouvez obtenir, d'une autre manière, la solution au problème n°1 donnée figure 2.

RIEN NE VA PLUS

Il est bien sûr tentant d'appliquer une de ces deux méthodes pour résoudre les deux autres énigmes dans le plan. Mais ce qui marche bien pour un problème ne

Pour aller plus loin

Pourquoi n'y a-t-il pas de solution à l'énigme n° 3 ?

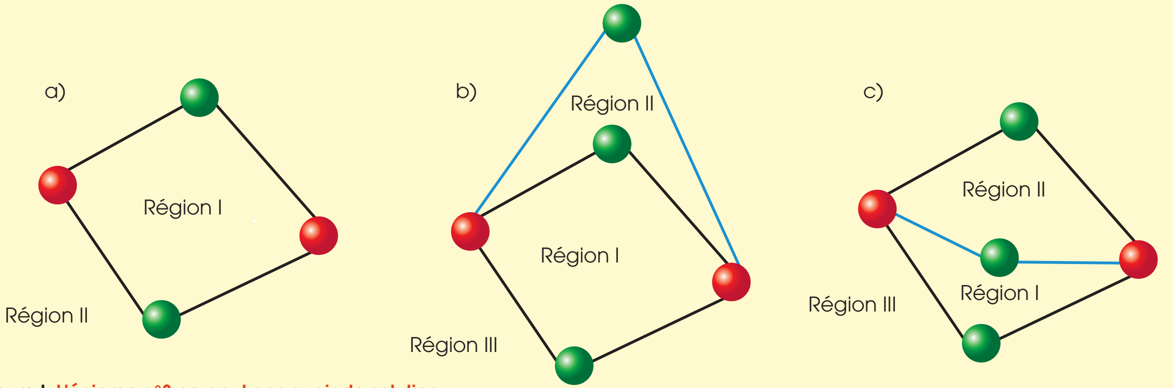

Figure I. L'énigme n°3 ne peut pas avoir de solution.

Vous voulez placer dans un plan deux groupes de trois points tels que chaque point du premier groupe soit relié par un trait aux trois points du second groupe, et cela sans que les traits (nécessairement inclus dans le plan) ne se croisent. Placez deux points verts et reliez-les chacun à deux points rouges (sans que les traits ne se croisent). Vous allez alors obtenir un dessin qui ressemble à une boucle, c'est-à-dire refermé sur lui-même (fig. Ia). Il délimite deux régions : l'une à l'intérieur de la boucle et l'autre à l'extérieur.

Ajoutez un point vert à cette construction : il est soit à l'extérieur de la boucle (fig. Ib), soit à l'intérieur (fig. Ic). Si vous le reliez aux deux points rouges déjà placés, vous allez, dans les deux cas, séparer le plan en trois régions, dont les frontières communes sont les traits entre les points. Il est alors clair que quelle que soit la région (I, II ou III) dans laquelle vous allez placer le troisième point rouge, il y aura toujours l'un des trois points verts qui sera dans une région différente. Vous ne pourrez le relier au troisième point rouge qu'en franchissant une frontière, ce qui aura pour conséquence d'avoir deux traits qui se croisent. Il n'y a donc pas de solution à l'énigme n° 3.

En ce qui concerne l'énigme n°2, la démonstration de l'absence de solution est un peu plus difficile ou, en tout cas, nécessite d'introduire un résultat théorique supplémentaire : la formule donnée par Euler en 1752. Cette dernière lie le nombre de points (p), de lignes (l) et de régions (r) constituant la représentation d'un graphe planaire et nous dit que $p + r = l + 2$. On peut montrer que l'existence d'une solution à l'énigme n° 2 contredirait cette formule.

Un jeu en ligne(s) À l'adresse **www.planarity.net**, vous trouverez un jeu en ligne dont le principe repose entièrement sur la notion de graphe planaire : à chaque niveau, on vous donne une représentation d'un graphe planaire dans laquelle des lignes se croisent. À vous de trouver comment déplacer les points (et les lignes qui vont avec) pour la rendre plane. Bien sûr, c'est de plus en plus dur, notamment parce que les nombres de points et de lignes augmentent à chaque niveau. Attention, quand on y a goûté, on a du mal à s'arrêter.

→→→

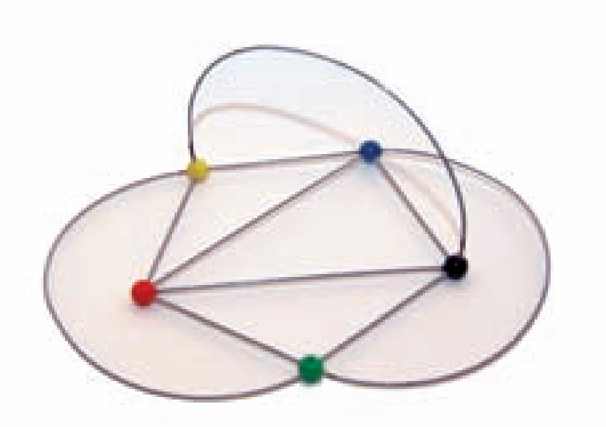

Figure 4. Tentative de résolution de l'énigme n°2.

fonctionne pas nécessairement pour un autre, même assez proche. Ici, ajouter un seul petit point complique tout... L'objet montré sur la figure 4 nous permet d'exhiber une ébauche de solution plane à l'énigme 2. Il montre cinq boules reliées deux à deux sans que les chemins qui les relient ne se croisent. Mais il n'est pas contenu dans un plan. Et si vous lui enlevez l'arceau qui relie la boule jaune à la boule noire, certes il devient plan, certes aucun chemin n'en croise un autre, mais la boule noire n'est plus reliée à la boule jaune...
Bref, s'il est facile de donner des solutions répondant à deux contraintes sur les trois, il n'est pas évident de les modifier pour qu'elles soient des solutions complètes à la deuxième énigme. Mettons fin à ce suspense insoutenable : il n'existe pas de solution plane à l'énigme n° 2. Pas plus d'ailleurs qu'à l'énigme n° 3.

PLANAIRE, OU PAS PLANAIRE ? TELLE EST LA QUESTION...

Pour bien comprendre la suite, il est très important de noter que les deux dessins de la figure 3, (avant et après le déplacement du point jaune) sont considérés mathématiquement comme deux « versions » (les mathématiciens parlent plutôt de représentations) différentes d'un même objet mathématique appelé un graphe, et non pas comme deux objets différents.
Si le dessin d'un graphe est contenu dans un plan sans que ses lignes ne se croisent (en dehors de leurs extrémités), on dit que ce dessin est une *représentation plane* du graphe. Un graphe qui admet une représentation plane, quitte à déplacer des points (et avec eux les lignes qui leur sont liées), est dit *planaire*. Autrement dit, toutes les représentations d'un graphe planaire ne sont pas nécessairement planes, mais elles peuvent toujours le devenir (fig. 5)... Vous me suivez toujours, j'espère ?

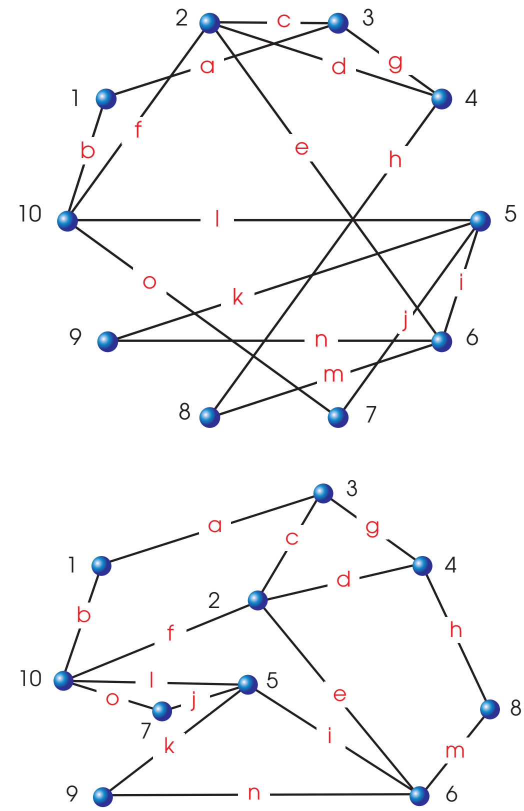

Figure 5. Un exemple de graphe planaire. Voici deux représentations différentes du même graphe : l'une s'obtient à partir de l'autre en déplaçant des points. La première représentation du graphe n'est pas plane, car des traits se croisent en dehors de leurs extrémités (les dix points bleus). Mais la seconde l'est. Le graphe est donc bien planaire.

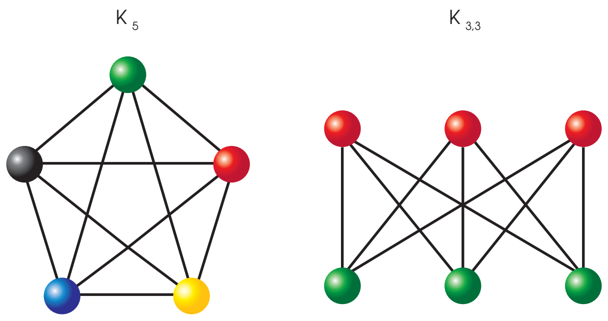

Figure 6. **Deux graphes non planaires exemplaires. Ces deux dessins constituent des ébauches de solutions aux deux dernières énigmes. Problème : il est impossible d'en tirer des solutions complètes.**

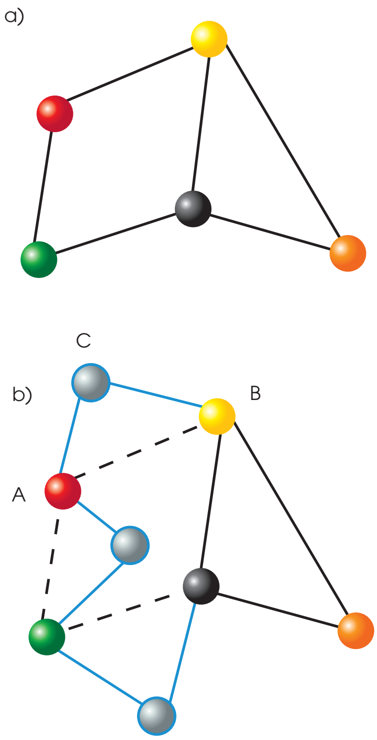

Figure 7. **Qu'est qu'une subdivision d'un graphe ? Le deuxième graphe est une subdivision du premier : des points (en blanc) ont été ajoutés de telle manière que des chemins entre deux points (en pointillés) se subdivisent en deux chemins entre trois points (en blanc). De plus, les chemins « dédoublés » ont les mêmes extrémités que les chemins qu'ils dédoublent.**

Ce qu'il faut retenir, c'est qu'il est possible de démontrer (encadré *Pour aller plus loin*) que les deux graphes associés aux deux dernières énigmes (fig. 6) ne sont pas planaires : vous pouvez déplacer les points de leurs représentations comme vous l'entendez, vous ne pourrez jamais éviter que deux lignes ne se croisent. Les mathématiciens leur donnent les doux noms de K_5 et $K_{3,\,3}$.

L'ÉTONNANT THÉORÈME DE KURATOVSKI

Dessinez un graphe. Ajoutez-lui un point C près d'un chemin reliant un point A à un point B. Remplacez le chemin « direct » entre A et B par un chemin en deux morceaux, le premier allant de A à C et le second de C à B. Recommencez éventuellement l'opération plusieurs fois, et vous obtiendrez ce que l'on appelle une *subdivision* du graphe de départ (fig. 7). Vous en conviendrez aisément : toute subdivision de K_5 ou $K_{3,\,3}$ ne peut être planaire, puisqu'eux-mêmes ne le sont pas.
Allons plus loin : tout graphe qui contient K_5, $K_{3,\,3}$ ou une de leurs subdivisions ne peut pas être planaire non plus. C'est le cas, par exemple, du graphe de Petersen (fig. 8). Donc, pour qu'un graphe soit planaire, il faut nécessairement qu'il ne contienne aucune subdivision des deux graphes en question. Mais il y a bien mieux… En 1930, le mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski a en effet démontré un résultat étonnant : l'in-

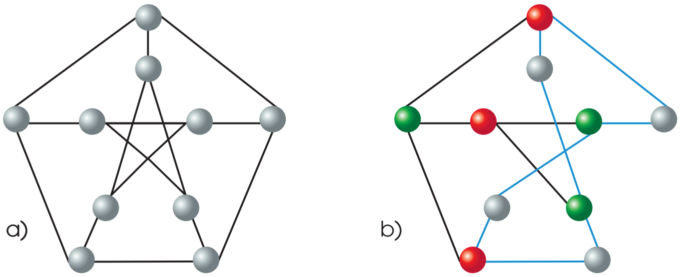

Figure 8. Le célèbre graphe de Petersen. a) Dessin complet du graphe de Petersen. b) Dessin obtenu en enlevant deux traits au graphe de Petersen. Or, vous pouvez colorier trois points en vert et trois points en rouge dans ce dessin, de telle manière que chacun des points rouges soient reliés à chacun des points verts, quitte à passer par un point intermédiaire (les chemins directs sont en noir, les chemins « subdivisés » en bleu, les points intermédiaires en blanc sur le dessin). Donc le graphe de Petersen contient une subdivision de $K_{3,3}$, donc il n'est pas planaire. Le graphe de Petersen est souvent utilisé en théorie des graphes. En particulier, il fournit des contre-exemples à un certain nombre de propriétés.

verse de la proposition précédente est également vrai ! Autrement dit, si un graphe ne contient ni K_5, ni $K_{3,3}$, ni aucune de leurs subdivisions, c'est un argument suffisant pour affirmer qu'il est planaire. Vous aurez donc toujours la possibilité de le modifier pour qu'aucune ligne n'en croise une autre, en déplaçant certains de ces points. Le problème est que le théorème de Kuratowski n'est qu'un critère de planarité.

Ce n'est déjà pas mal, surtout que la condition qui est donnée est simple à vérifier. Mais le souci est qu'il ne donne aucune marche à suivre sur la manière dont il faut déplacer les points pour trouver une représentation plane d'un graphe planaire (encadré *Un jeu en ligne(s)*)...

À QUOI CELA PEUT-IL BIEN SERVIR ?

En quoi est-ce intéressant de savoir qu'un graphe est planaire ou non ? Les graphes constituent un outil de modélisation rudimentaire mais très large, donc très souvent utilisé.

Problème : si vous placez au hasard les points d'un graphe qui modélise une situation concrète, quand vous les relierez par des lignes, il est fort possible que des lignes se croisent. Ce qui est dommage car la représentation plane d'un graphe est celle qui est le plus facilement « lisible ». Il suffit de regarder les deux versions du graphe de la figure 5 pour s'en convaincre ! Il est donc intéressant d'avoir un critère précis qui nous permette de savoir si le graphe en question est planaire. Prenons un exemple. Un circuit imprimé est une plaque isolante composée de deux faces : sur la première sont fixés des composants électroniques et sur la seconde il y a des pistes de cuivre conductrices reliant ces composants. Ces pistes dessinent les lignes d'un graphe, dont les pattes des composants électroniques sont les points. La planarité de ce graphe est d'une nécessité absolue : tout doit tenir dans le plan de la plaque et, sauf exception, aucunes lignes conductrices ne doivent se croiser. Une fois listés les composants électroniques et les liaisons électriques à établir entre eux, on peut tracer le graphe correspondant, vérifier s'il est planaire ou non, et, si oui, lui trouver une représentation plane. Savoir si un graphe est planaire ou pas est donc une motivation qui peut aller bien au-delà des mathématiques. **G. R.**

Remerciements à Romain Attal, Colline Bordes et Claudine Schwartz pour leurs relectures attentives et leurs remarques pertinentes.

Pour en savoir plus

Cet article est, en partie, fondé sur le chapitre 9 du livre
Théorie des graphes. Au-delà des ponts de Königsberg : problèmes, théorèmes, algorithmes.
Il est écrit par Olivier Cogis & Claudine Robert
et est paru en 2003 aux éditions Vuibert.