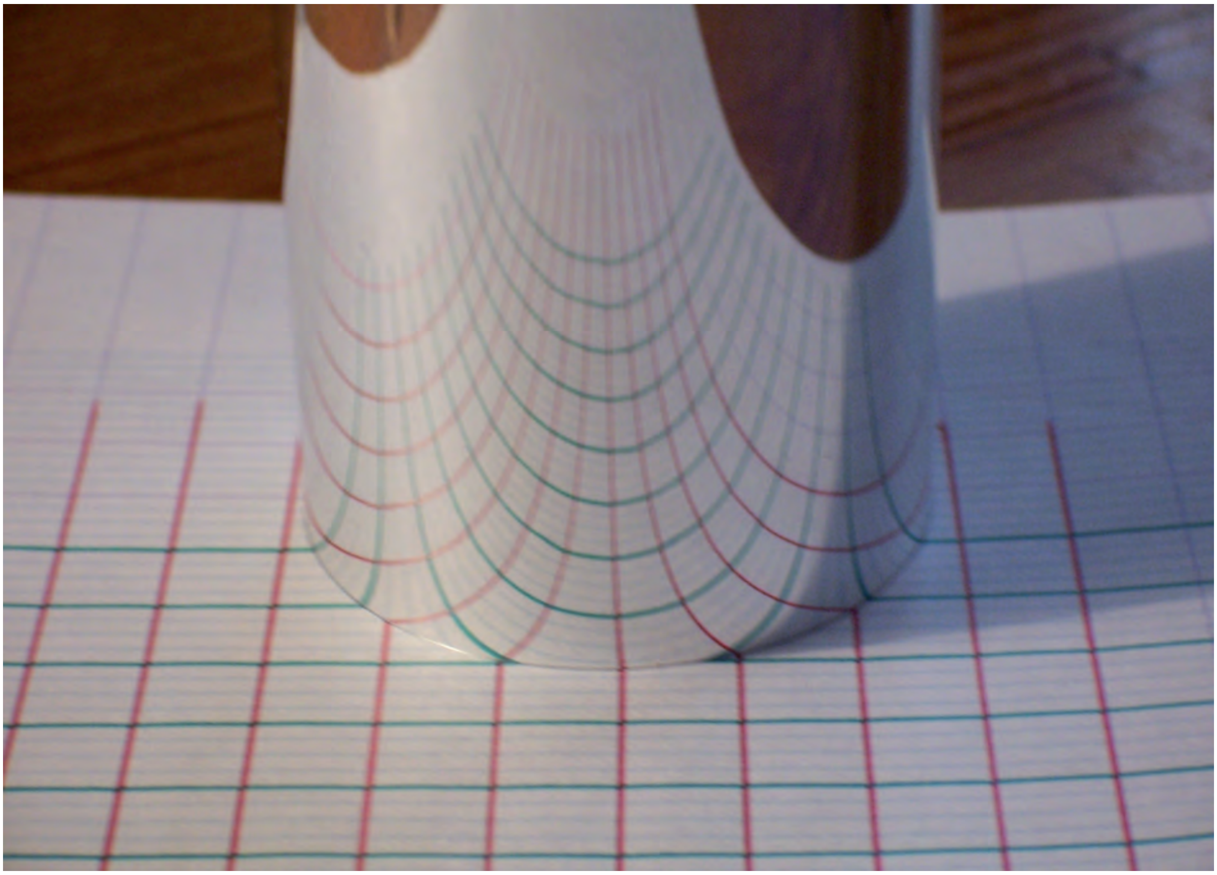


Image d'un quadrillage reflété sur un miroir cylindrique. © G. Reuiller.

Des formes… déformées ?

Qu'évoque pour vous le mot « géométrie » ? La règle, le compas, des figures dont on détermine des propriétés, comme les célébrissimes théorèmes de Pythagore et Thalès, des relations entre certains angles, certaines longueurs… D'autres approches se sont révélées particulièrement fructueuses, et notamment l'étude non plus des figures, mais des transformations que l'on peut leur faire subir. Pour une première approche, les logiciels de dessin peuvent donner des idées…

PAR **ROBIN JAMET**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

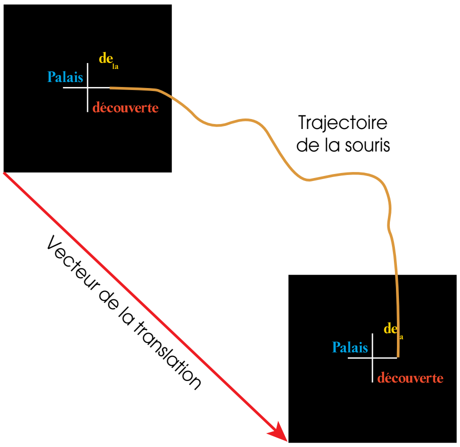


Figure 1. Déplacer une image avec un logiciel de dessin revient à lui appliquer une « translation ». Cette translation est caractérisée par un vecteur qui a une direction, un sens et une longueur donnés.

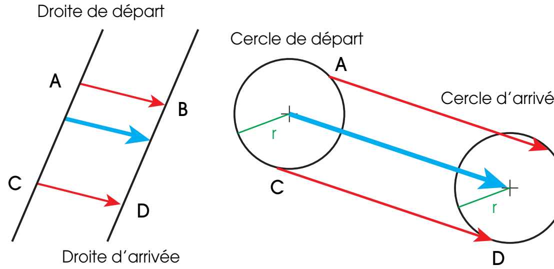


Figure 2. Translater une droite, c'est soit translater chacun de ses points un à un (A passe en B, C passe en D...), soit translater la droite entière. Le résultat est une droite parallèle à la droite de départ (sur le dessin, ABDC est un parallélogramme). De même, translater un cercle, c'est soit translater chacun de ses points un à un (A passe en B, C passe en D...), soit translater le cercle entier. Le résultat est un cercle de même rayon dont le centre est le translaté du centre du cercle de départ.

La modification la plus simple que vous proposent les logiciels de dessin est de prendre un objet pour le placer ailleurs. Peu importe le trajet que vous suivez, en ligne droite ou non, et peu importe l'endroit par où vous tenez l'objet pour le déplacer : il subit une *translation*. Cette translation est parfaitement décrite par un simple *vecteur* : une flèche qui donne, par sa direction (la droite qui le porte), son sens (le côté où est la flèche) et sa longueur, tous les éléments nécessaires pour caractériser le déplacement (fig. 1).

Ici, nous avons translaté un objet entier. On peut considérer que l'on a translaté chaque point individuellement avec le même vecteur, ou bien l'intégralité de l'objet : le résultat est le même. Ainsi, une même translation appliquée à tous les points d'une droite donne les points d'une droite, parallèle à la première. La translation appliquée à un cercle donne un cercle de même rayon dont le centre est le translaté du centre initial (fig. 2).

En fin de compte, la forme d'arrivée est bien le résultat de la translation appliquée à tous les points de la forme de départ, et à l'arrivée, rien n'est déformé. Il suffit de bouger la tête en suivant le vecteur de la translation pour voir exactement la même chose qu'avant.

Toujours sans le déformer, il y a une autre manière de bouger un objet : le tourner autour d'un point qui restera immobile. Souvent, les logiciels de dessin sont tels que le point en question est le centre de l'objet (fig. 3). Mais en mathématiques on ne s'impose pas ce genre de contraintes. Le point peut d'ailleurs ne même pas être sur l'objet. Dans tous les cas, on parle de *rotation*, qui se caractérise par un centre (point autour duquel on tourne) et un angle entre 0 et 360°. Là encore, en faisant suivre à votre tête la même rotation, vous verrez l'objet inchangé.

DE NOUVELLES TRANSFORMATIONS

Nous avons donc vu qu'aucune de ces deux transformations ne modifie l'objet auquel on les applique : l'objet est exactement le même à l'arrivée. Pour cette raison, nous les appellerons des *déplacements*, ainsi que tous les enchaînements de rotations et de translations. Faites subir à un objet autant de déplacements que vous le voulez, il sera toujours possible d'obtenir le même résultat avec une seule rotation, ou une seule translation, ou éventuellement l'une puis l'autre. Donc, enchaîner deux déplacements revient à faire un seul

→→→

Pour aller plus loin

Qu'est-ce qu'un groupe ?

Le groupe est un objet mathématique extrêmement pratique et très courant. Vous êtes susceptible d'en avoir trouvé un dès que vous êtes en présence d'un ensemble d'éléments (par exemple, les nombres entiers ou encore les fractions), et d'une opération sur ces éléments que l'on appelle *une loi de composition* (l'addition ou la multiplication). Mais ce n'est pas suffisant : pour que cet ensemble muni de cette loi soit vraiment un groupe, il doit vérifier certaines conditions.

UN MINIMUM DE RÈGLES

D'abord, il faut que votre ensemble soit *stable* sous cette opération : quand vous composez deux éléments quelconques du groupe, il faut absolument que le résultat soit dans le groupe. C'est le cas de nos deux exemples : la somme de deux nombres entiers est un nombre entier, le produit de deux fractions est une fraction.
Mais attention, ce n'est pas toujours le cas : si vous soustrayez deux nombres entiers positifs, le résultat ne sera pas toujours un nombre entier positif. Muni de la soustraction, l'ensemble des nombres entiers positifs ne constitue donc pas un groupe.
Ensuite, il doit exister dans cet ensemble un *élément neutre*, c'est-à-dire un élément qui, composé avec n'importe quel autre élément, le laisse inchangé. Dans nos exemples, ce sera le 0 (pour les entiers et l'addition) et le 1 (pour les fractions et la multiplication). Et puis, si vous composez plusieurs éléments à la suite, il ne faut pas que le résultat dépende de l'ordre dans lequel vous les composez. On dit que la loi de composition doit être *associative*.
Dans le cas de l'addition sur les entiers, l'égalité $(a + b) + c = a + (b + c)$ signifie que le résultat de ces additions ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les effectue. L'égalité $a + b = b + a$ signifie que le résultat de l'addition ne dépend pas de l'ordre d'écriture des nombres ajoutés. Cette dernière propriété n'est pas partagée par tous les groupes.
Enfin, il doit toujours y avoir un *élément inverse* à chaque élément du groupe, c'est-à-dire tel que composés ensemble, ces deux éléments donnent l'élément neutre. Dans le premier exemple, il s'agit du nombre opposé (-3 par rapport à 3, car $3 + (-3) = 0$).
C'est la fraction inverse dans le second (5/4 pour 4/5, car $5/4 \times 4/5 = 1$).
Les structures de type groupe sont très recherchées par les mathématiciens : elles permettent d'établir des liens entre des objets *a priori* très différents, donc entre des théories différentes, et d'avancer ainsi dans la compréhension de chacune…

REVENONS-EN À NOS TRANSFORMATIONS

Vous pouvez vérifier que l'ensemble des déplacements est bien un groupe, en choisissant comme loi de composition entre deux déplacements le simple fait de les appliquer à un objet l'un après l'autre. L'élément neutre sera alors une translation de vecteur nul, ou une rotation d'angle nul. Cette loi est bien sûr associative.
Enfin, quel que soit le déplacement que vous appliquez à un objet, il existe toujours un déplacement inverse, c'est-à-dire permettant de défaire exactement ce que vous venez de faire. Par exemple, si vous avez translaté un objet, il suffit de le translater une nouvelle fois avec un vecteur de même direction et de même longueur, mais de sens opposé, pour le faire revenir à sa position d'origine.

IL N'Y A PAS QUE DES GROUPES DANS LA VIE !

Contrairement aux déplacements, si vous enchaînez deux antidéplacements, le résultat sera un déplacement (fig. 4) et non un antidéplacement. Donc les antidéplacements, eux, ne forment pas un groupe. En revanche, si vous mettez ensemble déplacements et antidéplacements, vous obtiendrez à nouveau un groupe, celui des isométries.

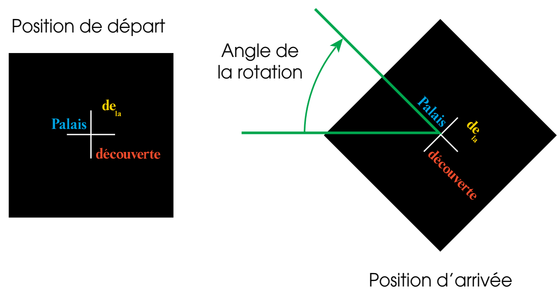


Figure 3. Tourner un objet (ici autour de son centre), signifie lui appliquer une « rotation ». Cette rotation a un centre et un angle.

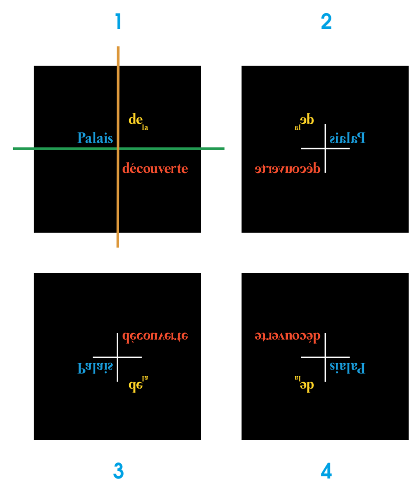


Figure 4. Les résultats de différentes symétries. (1) est l'image d'origine, (2) est son symétrique par rapport à l'axe orange, (3) son symétrique par rapport à l'axe vert. (4) est obtenu en faisant une symétrie d'axe orange puis d'axe vert (ou le contraire). Passer de (1) à (4) peut se faire directement, non pas en faisant une symétrie axiale mais en tournant autour du centre de l'image de 180°.

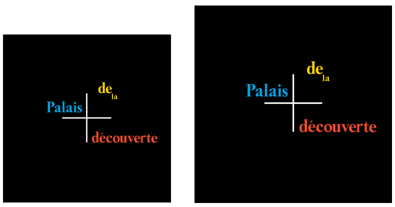
→→→

déplacement. L'ensemble de ces déplacements a en fait d'autres propriétés simples qui, mises ensemble, plaisent bien aux mathématiciens, puisqu'elles lui donnent une structure cohérente et fondamentale : celle d'un *groupe* (encadré *Qu'est-ce qu'un groupe ?*).
Les symétries axiales, elles non plus, ne changent ni les distances ni les angles (fig. 4). Pourtant, on ne peut plus parler de simple déplacement, car dans la plupart des cas, l'objet à l'arrivée n'est plus tout à fait le même qu'au départ : songez par exemple à une main gauche et une main droite, qui bien que de la même forme ne sont pas superposables. Ici, le texte du logo n'est plus lisible aussi facilement… Pour le voir inchangé, il faudrait retourner la feuille pour pouvoir regarder par transparence. Évidemment, avec un écran d'ordinateur…
En rajoutant les symétries, nous agrandissons notre ensemble de transformations géométriques pour y faire entrer les *antidéplacements* qui, contrairement aux déplacements, modifient l'orientation de l'objet. Si vous mettez ensemble déplacements et antidéplacements, vous obtiendrez à nouveau un groupe de transformations qui conservent toutes les distances : les *isométries*.

COMPLIQUONS UN PEU LES CHOSES…

Continuons la liste des modifications que vous pouvez faire subir à votre image. Dans certains logiciels, si vous sélectionnez l'un des coins de l'image, vous pourrez la déformer, mais sans changer ses proportions : elle grandit ou rapetisse, mais le rapport largeur/longueur reste le même (fig. 5b). Cette fois, les dimensions de l'objet ne sont plus les mêmes à l'arrivée, mais en revanche, comme les proportions sont conservées, les angles le sont également. Il suffit de se mettre plus loin ou plus près pour voir l'objet exactement comme avant la transformation. Vous pouvez bien sûr combiner un agrandissement ou une réduction avec une isométrie, l'image n'en reste pas moins tout à fait reconnaissable, voire même inchangée en se plaçant au bon endroit. Nouveau groupe, nouveau nom : les *similitudes*, car l'objet, même plus grand ou plus petit, reste semblable à son original.
Si, au lieu de sélectionner le coin de l'image, vous sélectionnez un point sur l'une de ses largeurs ou sur l'une de ses longueurs, vous allez déformer l'image mais sans

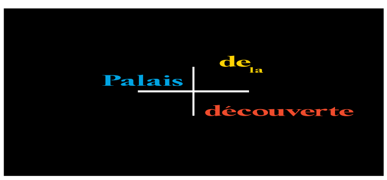
→→→



a)

b)

c)



d)

Figure 5. Différentes manières de déformer une image. (a) est l'image d'origine. Dans le premier cas (b), les proportions de l'image n'ont pas été modifiées, ce qui n'est pas le cas dans les deux suivants (c) et (d).

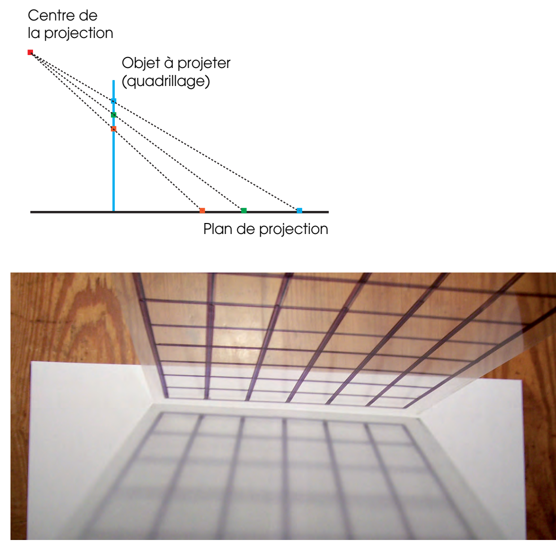


Figure 6. Projection d'un quadrillage sur un plan perpendiculaire. La photographie est vue de dessus, le dessin correspond à la vue de profil. Nous avons projeté un quadrillage sur un plan qui lui est perpendiculaire. Le centre de la projection est le centre de la source lumineuse qui permet d'effectuer la projection. © G. Reuiller.

respecter les proportions : elle sera étirée, en longueur ou en largeur (fig. 5c et d). Voilà enfin ce qu'en langage courant on appellerait vraiment une « transformation » ! Si les distances et les angles ne sont plus les mêmes, d'autres propriétés mathématiques sont conservées : une droite reste une droite, par exemple, seule sa pente peut varier. Des droites parallèles entre elles le resteront.

DE LA PROJECTION À L'ANAMORPHOSE

Quittons les logiciels de dessin pour passer au projecteur de diapositives : une autre manière de déformer un objet est de le projeter sur un plan. Cela correspond à la transformation géométrique que l'on appelle *projection centrale*. En général, l'écran et la diapositive sont plans et parallèles entre eux. Amusons-nous un peu et inclinons la diapositive perpendiculairement à l'écran. Si ce que vous projetez est un pavage de carrés, vous obtiendrez un pavage de trapèzes (fig. 6).
En effet, la projection des verticales du quadrillage (qui sont parallèles entre elles) donne des segments avec un point d'intersection. La projection de deux droites parallèles ne donne donc pas toujours des droites parallèles. Quelles propriétés sont conservées lors d'une projection ? C'est l'une des questions qui est traitée par la *géométrie projective*.
Après projection, vous pouvez toujours récupérer l'image de départ en vous plaçant au centre de projection. Il s'agit en fait seulement d'un changement de point de vue. C'est de ce genre de considérations dont les *anamorphoses* sont issues : ces dessins qui sont volontairement déformés pour que, vus d'un point précis, ils apparaissent non déformés. L'exemple le plus courant est celui du vélo dessiné sur les pistes cyclables (fig. 7), qui est conçu pour être observé depuis un plan perpendiculaire au sol (c'est-à-dire le plan à partir duquel le voit le cycliste ou l'automobiliste).

DÉFORMER SANS CASSER

Si, au lieu de projeter sur un plan, vous projetez sur des surfaces courbes, vous allez obtenir des déformations beaucoup plus conséquentes. La figure en ouverture montre par exemple ce que donne la projection d'un

Figure 7. Une anamorphose très répandue. Si vous regardez un vélo dessiné sur un piste cyclable « par-dessus » (c'est-à-dire dans un plan parallèle au sol), vous le verrez déformé. Si vous vous placez dans un plan perpendiculaire au sol (c'est-à-dire celui à partir duquel le cycliste regarde le dessin), le vélo vous semblera beaucoup moins déformé. © G. Reuiller.

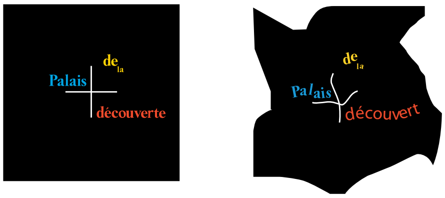


Figure 8. Déformation continue d'un objet. Il s'agit du même objet topologique.

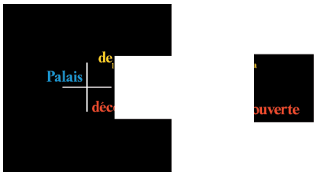


Figure 9. Casser n'est pas jouer. L'objet topologique n'est plus le même.

quadrillage carré sur un cylindre. On peut alors se poser la question dans l'autre sens : comment déformer un « quadrillage » dans le plan pour qu'il apparaisse comme un quadrillage carré sur le cylindre ? De manière plus générale, on peut se demander comment déformer au préalable un objet pour que son reflet sur un miroir cylindrique ressemble à l'image d'origine. Si, au lieu du cylindre, on imagine des surfaces particulièrement cabossées, on pourra trouver des déformations du type de celles de la figure 8. À première vue, rien ne semble conservé : droite, cercle, tout a disparu. Et pourtant, chaque lettre reste en un seul morceau, deux lignes qui se croisent continueront de se croiser, une boucle fermée comme la lettre « o » reste fermée, un chemin ouvert comme le « u » reste ouvert…

Plus généralement, les différentes « zones », et les relations qu'elles ont entre elles (voisines ou non, incluses les unes dans les autres ou non) resteront les mêmes. Bref, tant que les déformations envisagées n'engendrent ni trou ni pli, ce que l'on appelle les propriétés *topologiques* demeurent. Dans le cas contraire, même s'il peut paraître moins déformé, ce n'est plus le même objet topologique (fig. 9).

Au-delà des questions spécifiques posées dans les différentes approches survolées dans cette rubrique, nous avons retrouvé des préoccupations communes : à quel point un objet est-il reconnaissable après avoir été transformé ? Quelles propriétés sont conservées par telle ou telle opération ? Quels critères utiliser pour classer les objets de façon pertinente ? Pour répondre à ces questions simples, nous avons créé ou mobilisé de nouveaux objets, changé de point de vue. Suivant notre préoccupation, des questions différentes sont posées sur un même objet, ou une même question sur des objets différents... C'est justement l'une des activités du mathématicien que de chercher à classer les objets, de dégager les structures cachées, et d'établir ainsi, quand c'est possible, des liens entre des objets apparemment très différents. Tout nouveau chapitre apparaît « naturellement » en réponse à des questions posées ailleurs. La géométrie en est un bon exemple : pensiez-vous y trouver tant de richesses ? **R. J.**