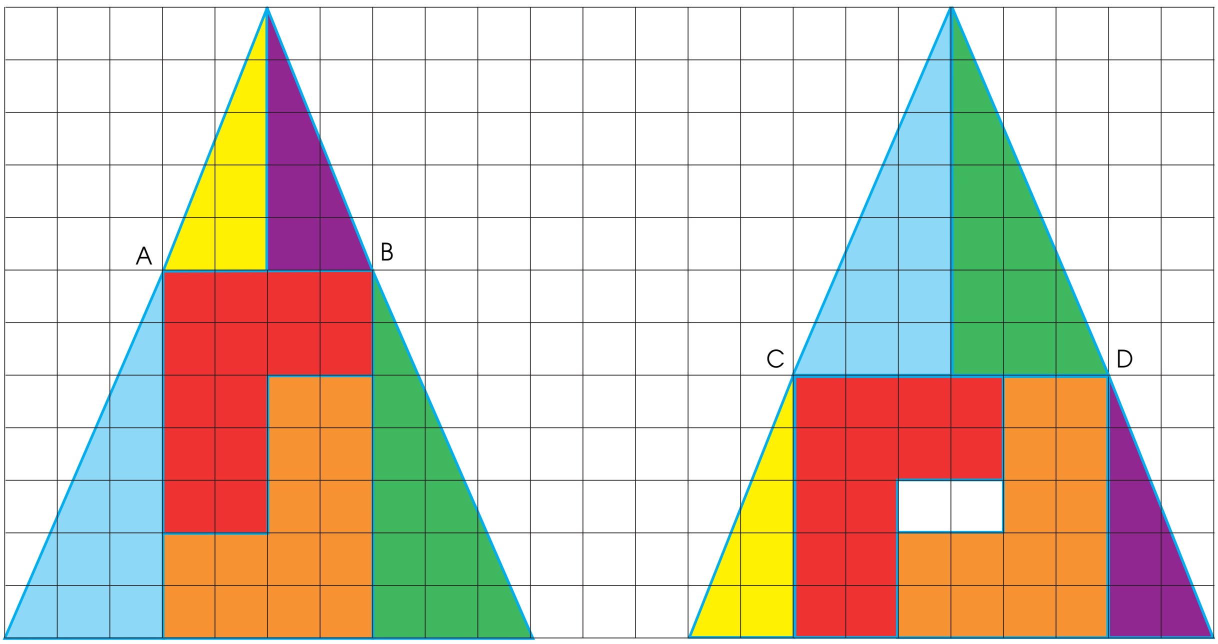


Triangle de Curry. Avec les mêmes pièces, il semble possible de réaliser deux triangles, dont le second a un trou de deux unités d'aire par rapport au premier ! Où est l'astuce ?

Formes mathématiques

Les maths « façon puzzle »

Qui a dit que les puzzles étaient de simples jeux ? Pas les mathématiciens en tout cas, qui les utilisent parfois comme éléments de démonstration, ou qui en font des sujets d'étude à part entière. Par exemple, ils peuvent se demander quand et comment il est possible de découper une forme pour en faire un puzzle... permettant de construire une autre forme.

PAR **GUILLAUME REUILLER,** MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

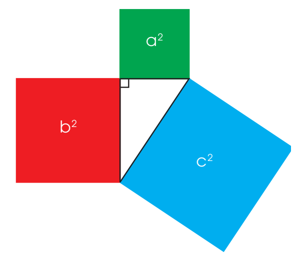


Figure 2. Le théorème de Pythagore « façon puzzle ».

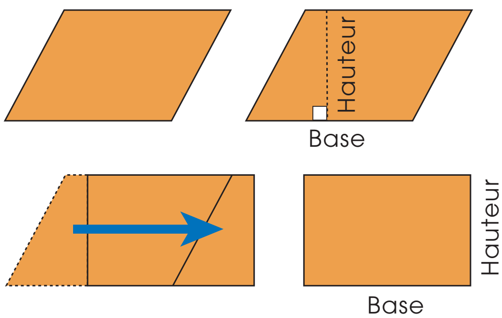


Figure 1. Découpage d'un parallélogramme pour en faire un rectangle. Une simple translation d'une section de ce parallélogramme permet de justifier la formule donnant son aire.

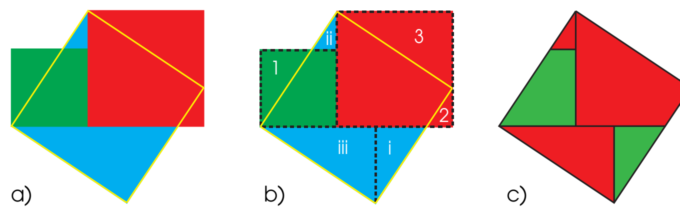


Figure 3. Une justification du théorème de Pythagore.
a) On fait glisser les carrés vert et rouge sur le carré bleu. Il reste alors deux pièces triangulaires du carré bleu qui ne sont pas recouvertes.
b) Or il y a aussi trois pièces des carrés vert et rouge (notés 1, 2 et 3 sur le dessin) qui sont à l'extérieur du contour du carré bleu (en jaune). En découpant judicieusement en deux la plus grande pièce triangulaire bleue, on obtient trois pièces bleues (notées i, ii et iii) exactement identiques à 1, 2 et 3.
c) Il n'y a donc plus qu'à faire glisser 1 en i, 2 en ii et 3 en iii pour reconstituer exactement le carré bleu.

Vous souvenez-vous de la formule donnant l'aire d'un parallélogramme ? Base × hauteur ? Exact. Mais savez-vous comment la justifier ? Une manière de procéder est de découper le parallélogramme en deux pièces possédant chacune deux angles droits (fig. 1). Ensuite, vous en déplacez une pour obtenir un rectangle (de même base et de même hauteur)... qui aura nécessairement la même aire puisqu'il sera constitué des mêmes surfaces. Or, tout le monde sait que la formule de l'aire d'un rectangle est longueur × largeur, c'est-à-dire base × hauteur, c'est donc aussi celle du parallélogramme.

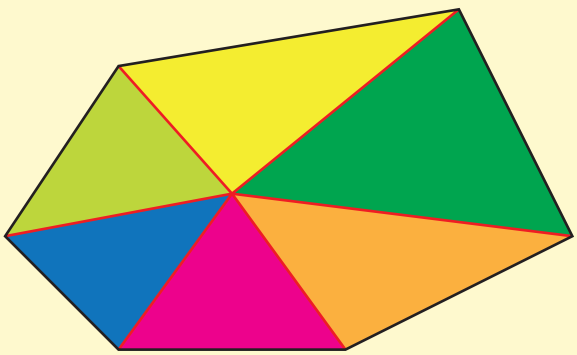
« Le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. » Inoubliable théorème de Pythagore ! Eh bien lui aussi vous pouvez le justifier par la réalisation d'un puzzle. Mais pour cela, il faut d'abord se rappeler qu'il a une signification en terme d'aires. Reprenons : soit un triangle rectangle de côtés a, b et c pour le plus long d'entre eux (c'est-à-dire l'hypoténuse, le côté opposé à l'angle droit). Alors : $a^2 + b^2 = c^2$. Or les carrés de a, b et c sont les aires des carrés construits sur les côtés du triangle (fig. 2). Le théorème de Pythagore ne dit donc rien d'autre que : « l'aire du carré bleu est égale à la somme de l'aire du carré rouge et de celle du carré vert ». Une manière de justifier le théorème de Pythagore est donc de trouver un découpage des carrés rouge et vert qui permette de reconstituer exactement le carré bleu (fig. 3).

ATTENTION, DANGER !

Est-ce que la réalisation de ce puzzle à cinq pièces constitue une démonstration acceptable du célébrissime théorème de votre enfance ? De manière générale, pour démontrer un théorème de géométrie en passant par un puzzle, il faut prendre un certain nombre de précautions... La première est de vérifier que les déplacements effectués ne changent effectivement pas les aires des pièces. C'est le cas dans nos deux exemples représentés figures 1 et 3, car tous les mouvements de pièces effectués sont des translations (lire les *Formes mathématiques* du numéro précédent de la revue *Découverte*).

Pour aller plus loin

Une preuve du théorème de Bolyai



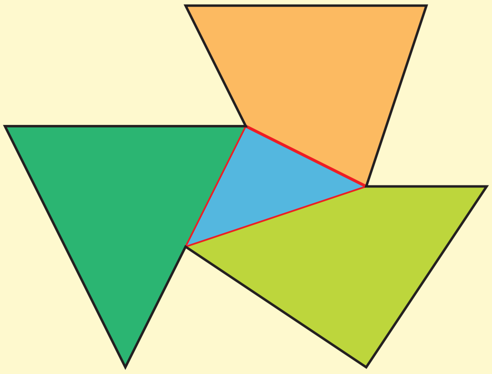


Figure I. Un polygone sans angle rentrant peut toujours être découpé en triangles. Il suffit pour cela de prendre n'importe quel point à l'intérieur du polygone et de le relier aux sommets.
Figure II. Un polygone avec des angles rentrants (en noir sur le dessin) peut toujours être découpé en polygones n'en ayant pas. Ici, il suffit par exemple de tracer trois de ses diagonales intérieures (en rouge sur le dessin). On obtient alors quatre polygones convexes : deux triangles et deux quadrilatères.

Vous voulez prouver qu'il est possible de décomposer tout polygone en pièces polygonales pour en faire un polygone quelconque ayant la même aire. Si vous démontrez qu'il est possible de passer de n'importe quel polygone à un carré de même aire par des dissections polygonales, c'est gagné :
– vous partez d'un polygone 1, que vous découpez en polygones pour en faire un carré de même aire ;
– vous faites la même chose pour un polygone 2 de même aire : le résultat donnera le même carré ;
– reste alors à « superposer » les deux dissections polygonales du carré pour obtenir un découpage permettant de construire à la fois le polygone 1 et le polygone 2 à partir du carré.

COMMENT « QUARRER » UN POLYGONE

N'importe quel polygone convexe (c'est-à-dire sans angle rentrant) peut se décomposer en triangles. Pour cela, il suffit de prendre un point à l'intérieur du polygone et de le relier à tous ses sommets (fig. I). Ou alors, tout simplement, de tracer quelques-unes de ses diagonales. On peut d'ailleurs montrer, par une démonstration par récurrence, qu'un polygone à n côtés, où n est plus grand que 3, peut se décomposer en n – 2 triangles (un carré en deux triangles, un pentagone en trois, etc.). Or, tout polygone admettant des angles rentrants peut se décomposer en polygones convexes (fig. II). Donc, on peut affirmer que tout polygone peut se décomposer en triangles.
On peut montrer que n'importe quel triangle peut être décomposé en pièces polygonales permettant de construire un rectangle de même aire (fig. III). On peut également montrer que n'importe quel rectangle peut être décomposé de manière à obtenir un carré de même aire (fig. IV).
Bilan : tout polygone peut être décomposé en pièces permettant de construire des rectangles.

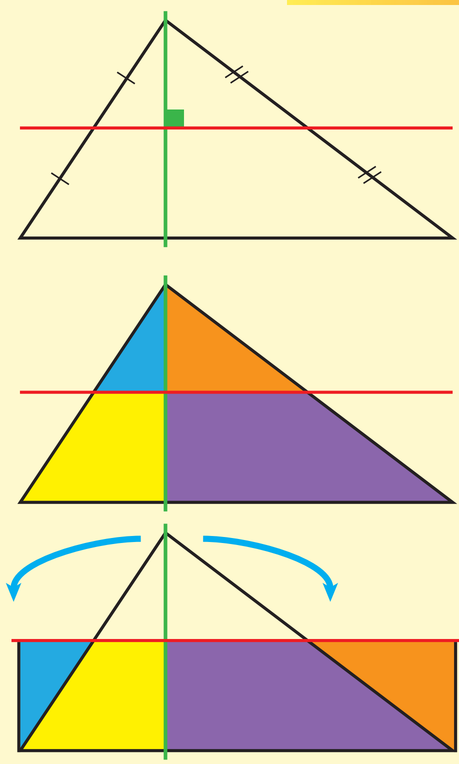


Figure III. Comment transformer un triangle en rectangle ? Pour cela, identifiez le côté opposé au plus grand angle du triangle (ce choix est important pour que la construction qui suit reste à l'intérieur du triangle). Tracez la parallèle (en rouge) à ce côté coupant les deux autres côtés du triangle en leurs milieux. Tracez la perpendiculaire (en vert) à cette droite passant par le sommet du plus grand angle. Vous avez alors découpé votre triangle en quatre pièces : deux triangles et deux trapèzes. Il ne vous reste plus alors qu'à faire tourner les triangles pour obtenir un rectangle.

Mais tout rectangle peut être décomposé de manière à obtenir un carré. Donc, finalement, tout polygone peut être décomposé en pièces polygonales de manière à construire des carrés.

OÙ INTERVIENT LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Il ne reste plus qu'à trouver comment passer de plusieurs carrés à un seul. Cela ne vous fait-il pas penser à quelque chose ? Au théorème de Pythagore, bien sûr !
Nous avons vu un puzzle qui correspond à ce théorème : il permet de fabriquer un seul carré à partir de deux. Puisque l'on sait maintenant transformer deux carrés en un seul par découpage polygonal, on sait le faire, de proche en proche, pour un nombre quelconque de carrés. Et notre théorème est démontré.
Ce qui frappe dans cette démonstration du théorème de Bolyai, c'est son extraordinaire simplicité. Pour la suivre, il suffit d'être rigoureux et méthodique.

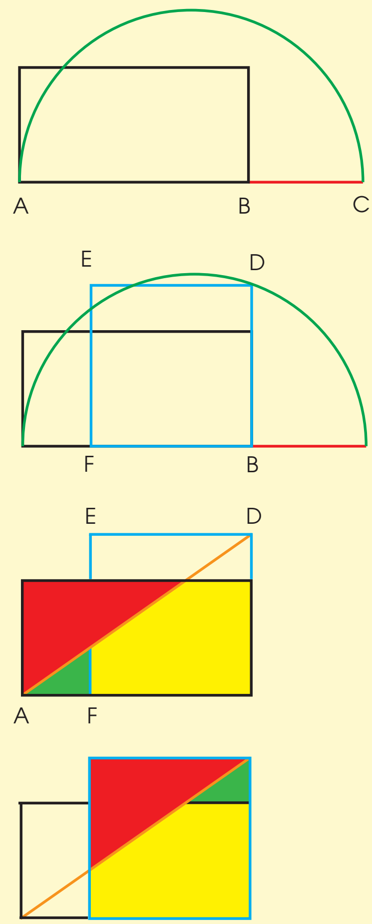
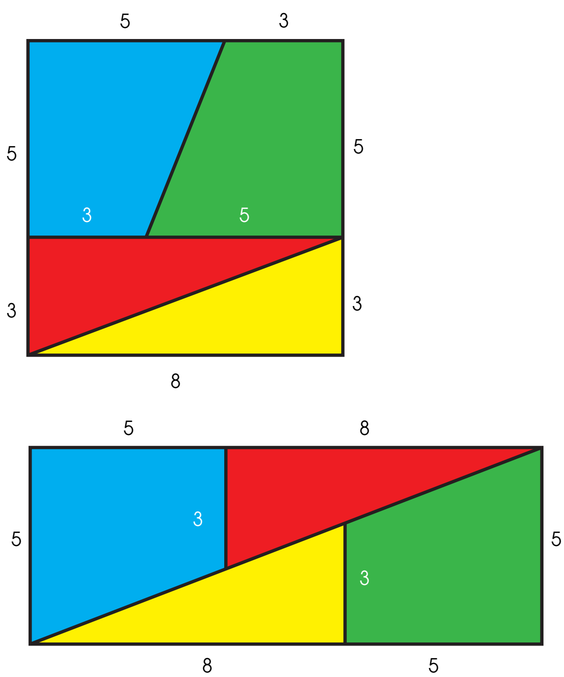


Figure IV. Comment transformer un rectangle en carré ? Là, les choses sont un peu plus compliquées… D'abord, construisez le carré en question. Pour cela, vous prolongez une longueur (AB) du rectangle en lui adjoignant sa largeur (trait en rouge sur le dessin). Puis, vous tracez le cercle de diamètre (AC). Prolongez la largeur du rectangle à l'intérieur de ce cercle : cela vous donne le point D. Le carré recherché est BDEF. Ensuite, vous allez découper les pièces polygonales dans le rectangle. Pour cela, tracez (AD). (EF) et (AD) partagent le rectangle en trois pièces. Il ne vous reste plus qu'à translater deux de ces trois pièces (la rouge et la verte), pour obtenir le carré.



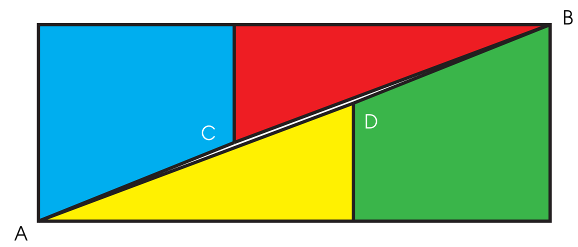


Figure 4. Le paradoxe dit de Lewis Carroll. Avec les mêmes pièces de puzzle, il semble possible de construire un carré d'aire $(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$ et un rectangle d'aire $5 \times (5 + 8) = 5 \times 13 = 65$…

Figure 5. La réponse au paradoxe de Lewis Carroll. L'aire du quadrilatère ACBD n'est pas nulle, mais équivaut au contraire à une unité d'aire, d'où le paradoxe précédent.

Mais ce n'est pas tout. Regardez l'exemple de la figure 4, souvent appelé « paradoxe de Lewis Carroll » (l'auteur de *Alice aux pays des merveilles*, de son vrai nom Charles Dodgson, était aussi mathématicien).

À première vue, il semble possible de constituer avec les mêmes pièces de puzzle un carré dont l'aire vaut 64 et un rectangle dont l'aire vaut 65. Cela semblerait prouver que 64 = 65, ce qui est idiot ! Où est l'astuce ? C'est que le rectangle n'en est pas un (fig. 5). En fait, il s'agit d'un rectangle troué car les points ACB et ADB ne sont pas alignés : ACBD est un parallélogramme presque plat, mais presque seulement...

Autre exemple de paradoxe géométrique : le « triangle » dit de Curry (du nom d'un magicien new-yorkais) qui illustre le début de cet article.

En fait aucune de ces deux figures n'est un triangle. Ce sont deux pentagones, avec deux angles légèrement rentrants pour le premier (en A et B) et deux angles légèrement bombés pour le second (en C et D). D'où la différence (discrète) de deux unités d'aire entre les deux. Il faut donc toujours vérifier aussi que la forme que l'on pense obtenir est bien celle-là, que les alignements que l'on « voit » en sont vraiment… Vous voilà convaincus : espérer démontrer en manipulant des pièces de puzzle n'est pas suffisant.

LE THÉORÈME AUX MILLE PUZZLES

À ce prix, un puzzle peut donc aider à démontrer un théorème, mais à l'inverse un théorème peut être à l'origine de la création de puzzles. C'est le cas du magnifique théorème de Lowry-Wallace-Bolyai-Gerwien, qui doit son nom composé au fait qu'il a été démontré indépendamment par plusieurs mathématiciens au cours du XIX^{e} siècle, mais qui est connu plus simplement sous le nom de théorème de Bolyai.

Que dit ce théorème ? « Deux polygones sont décomposables par les mêmes dissections polygonales si et seulement s'ils ont la même aire. » Autrement dit, étant donné deux polygones de même aire, il est toujours possible de découper l'un en un nombre fini de pièces polygonales qui peuvent être réarrangées pour reconstituer exactement l'autre.

Réarranger signifie, mathématiquement parlant, appliquer des translations et des rotations aux pièces. Il est absolument nécessaire que les deux polygones aient la même aire pour que cela soit possible. Ce que démontre,

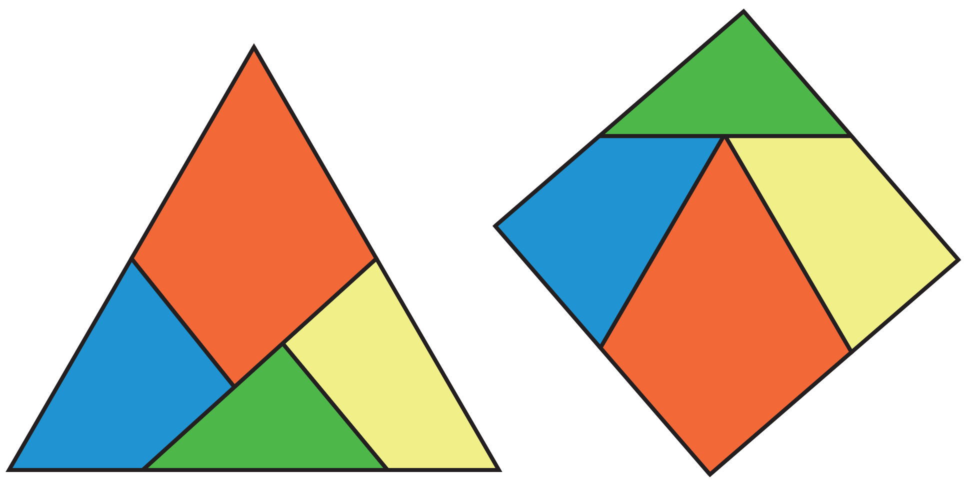


Figure 6. Le puzzle de Dudeney (1902). Dudeney a réussi à découper un triangle équilatéral en quatre pièces qui permettent de construire aussi un carré de même aire (ou le contraire !). Pour passer du triangle au carré, il suffit de faire subir aux pièces deux rotations d'un demi-tour et trois translations.

par exemple, Bolyai en 1832 ou le lieutenant prussien Gerwien en 1833, c'est que c'est aussi suffisant (encadré *Une preuve du théorème de Bolyai*).

Ce théorème donne du baume au cœur à tous les inventeurs de puzzles géométriques. En effet, en prenant deux polygones quelconques de même aire, ils savent qu'ils peuvent toujours faire un puzzle de pièces polygonales qui permet de construire les deux polygones à la fois.

De plus, la démonstration du théorème donne une feuille de route pour réaliser concrètement ce puzzle. Malheureusement, le puzzle obtenu n'est souvent pas très joli, car il comprend beaucoup de pièces.

L'ingéniosité des concepteurs de puzzles tels que le mathématicien Henry Ernest Dudeney (1857-1930) consiste alors à trouver des décompositions de polygones inattendues, notamment parce que les pièces sont simples (elles ont peu de côtés) et en petit nombre. Le puzzle de la figure 6 en est un exemple. Sous son apparente simplicité, il cache une propriété assez surprenante… Mais cela est un autre sujet, que nous développerons dans le prochain numéro de la revue.

À suivre, donc… **G. R.**

Pour en savoir plus

Pour voir des démonstrations animées du théorème de Pythagore, se connecter sur le site du Palais de la découverte à la page : http://www.palais-decouverte.fr/index.php?id=858.

De même, sur le site du Kangourou des mathématiques, vous trouverez des animations sur la démonstration du théorème de Bolyai, présentée dans l'encadré *Une preuve du théorème de Bolyai*, à la page suivante : http://www.mathkang.org/swf/POLYGO/THEOBOLY/PUZPOL4.htm

Dans *L'ouvert* n° 117, vous trouverez un article (un peu technique) de Jean-Pierre Friedelmeyer qui détaille la méthode de Gerwien. Y figure un très joli pavage du plan fondé sur le puzzle de Dudeney.