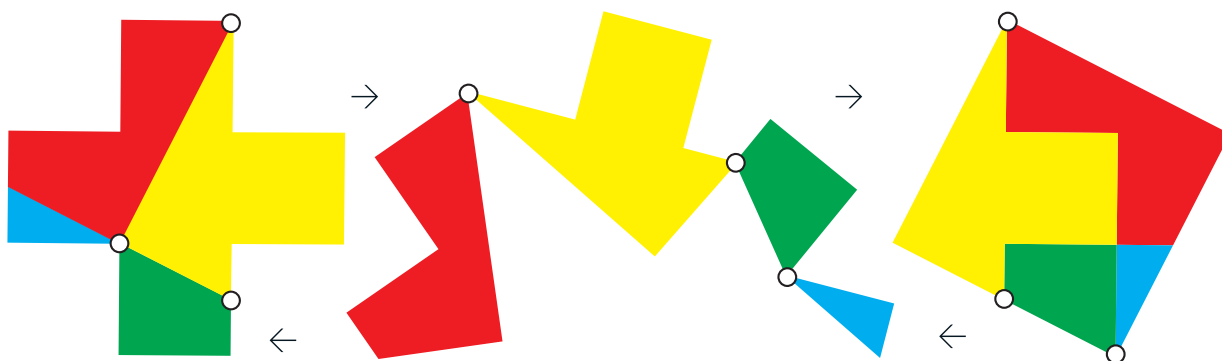


Formes mathématiques (Encore) des maths « façon puzzle »

Dans le précédent numéro de la revue, nous avons évoqué le théorème de Bolyai, qui nous affirme qu'il est toujours possible, étant donnés deux polygones de même aire, de découper le premier en un puzzle permettant de construire le second. Nous allons voir ensemble dans cet article différentes manières de prolonger ce théorème.

PAR **GUILLAUME REUILER**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE



Une croix grecque qui se transforme en carré.

Extrait de G.N. Frederickson, *Hinged Dissections : Swinging & Twisting*, Cambridge University Press, New York, 2002, pp. 93-94. © G.N. Frederickson.

Le puzzle de Dudeney est un bel exemple d'application du théorème de Bolyai. Ce théorème nous dit que si nous considérons deux polygones de même aire, il est toujours possible de décomposer l'un des deux en pièces polygonales permettant d'obtenir l'autre. En l'occurrence, Henry Ernest Dudeney (1857-1930) a conçu un puzzle à quatre pièces permettant de construire soit un carré, soit un triangle équilatéral. Mais son puzzle possède une propriété supplémentaire qui le rend encore plus surprenant : il peut être « articulé » (fig. 1). Cela signifie que l'on peut passer du carré au triangle (et vice versa) uniquement en tournant les pièces autour d'un de leurs sommets. Concrètement : on pourrait disposer des charnières qui permettraient de passer sans souci d'un poly-

gone à l'autre. Et c'est exactement ce qu'a fait Joop Van Der Vaart pour concevoir sa table pour trois ou quatre personnes (fig. 2).

UN RÉSULTAT TOUT RÉCENT

Connaissant le théorème de Bolyai et cet exemple du puzzle de Dudeney, il est naturel (pour un mathématicien en tout cas) d'essayer de savoir si la dissection polygonale d'un polygone afin d'en obtenir un autre de même aire peut toujours exister dans une version « articulée ». Attention, la question n'est pas de savoir si toute dissection polygonale peut être articulée (comme le montre l'exemple de la figure 3, ce n'est pas toujours possible) mais si l'on peut toujours en trouver au moins une qui le soit. Ainsi, pour l'exemple de la figure 3, il existe effectivement un puzzle articulé

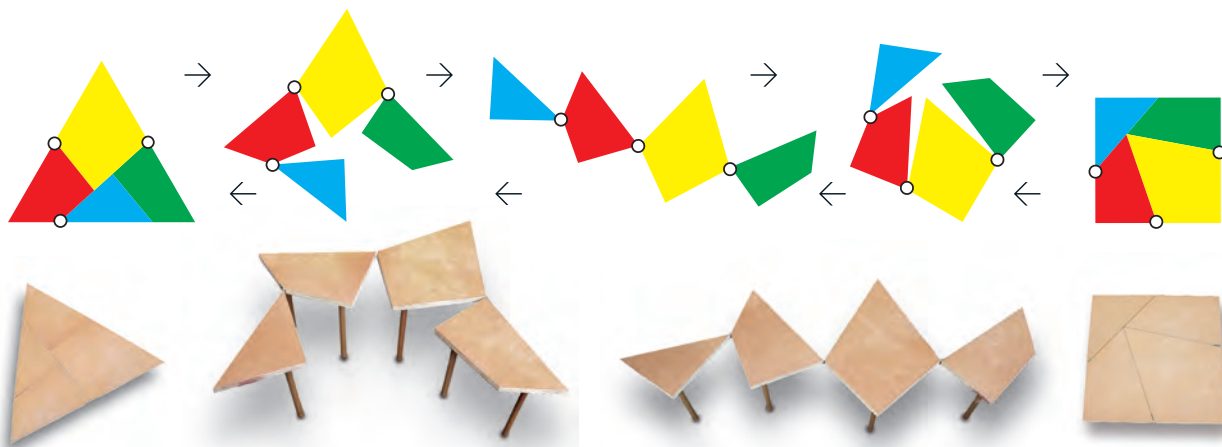


Figure 1. Un triangle qui devient un carré (et vice versa).

Figure 2. La table de Joop Van Der Vaart. Vous êtes trois personnes installées autour d'une table triangulaire, quand un ami frappe à la porte... Pas de panique : il s'agit d'une table un peu spéciale, facilement transformable en table carrée. © J. Van Der Vaart.

à sept pièces permettant de passer de l'octogone au carré (fig. 4). La réponse est alors positive et la preuve de ce résultat a été établie en juin 2008 par une équipe de six mathématiciens en « géométrie computationnelle » (Erik et Martin Demaine, Timothy Abbott, Zachary Abel, Scott Kominers et David Charlton). Ce qui est intéressant, c'est que leur démonstration est constructive, c'est-à-dire qu'elle ne se contente pas de dire que cela est possible, elle donne aussi explicitement une méthode pour réaliser cette décomposition « articulée ». Cette méthode permet même d'éviter les blocages qui pourraient survenir lors de la manipulation des pièces (en pratique, il est impossible que des pièces s'interpénètrent). Autrement dit, le puzzle articulé ainsi fabriqué fonctionne réellement, et pas seulement comme une simple vue de l'esprit. En revanche, le résultat n'est alors pas forcément le plus « joli » (notamment parce qu'il va comporter beaucoup de pièces) et l'ingéniosité des concepteurs de puzzles peut encore s'exprimer au-delà de considérations purement mathématiques...

UN DES FAMEUX PROBLÈMES DE HILBERT

Paris, mercredi 8 août 1900. Second Congrès international des mathématiciens. Lors de son discours inaugural très attendu intitulé « Sur les problèmes futurs des mathématiques », David Hilbert (1862-1943) énonce 23 problèmes qui tiennent les mathématiciens en échec et qu'il considère comme les plus intéressants à résoudre au cours du XX^e siècle. Le troisième de la liste est la généralisation du théorème de Bolyai dans l'espace. En effet, connaissant le théorème de Bolyai, un mathématicien se posera inmanquablement

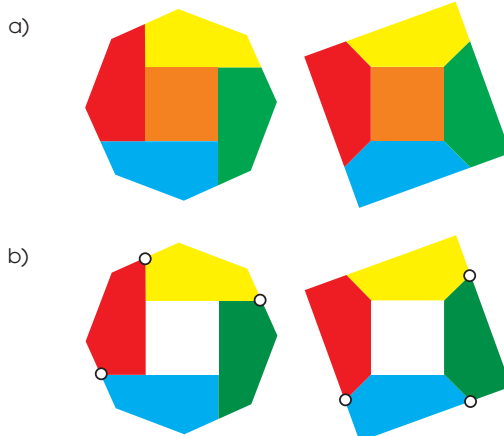


Figure 3. Le carré-octogone, et vice versa. a) Ce puzzle de cinq pièces permet de construire soit un octogone régulier, soit un carré. Mais il n'est pas possible de l'« articuler » pour passer naturellement d'une figure à l'autre. Il suffit pour s'en convaincre de chercher l'endroit où l'on pourrait fixer le carré à l'une des autres pièces... b) En revanche, si l'on enlève la pièce carrée au centre, on peut fixer trois charnières qui permettent d'« articuler » ce puzzle.

la question de savoir ce qui se passe en dimension supérieure. Autrement dit, si vous avez deux polyèdres de même volume, est-il toujours possible de découper le premier en polyèdres permettant de reconstruire exactement le second ? Parmi les 23 problèmes proposés par Hilbert, certains n'ont toujours pas trouvé de solution aujourd'hui. Ce n'est pas le cas du troisième qui, en fait, avait déjà été résolu par un assistant de Hilbert : le mathématicien Max Dehn (1878-1952).



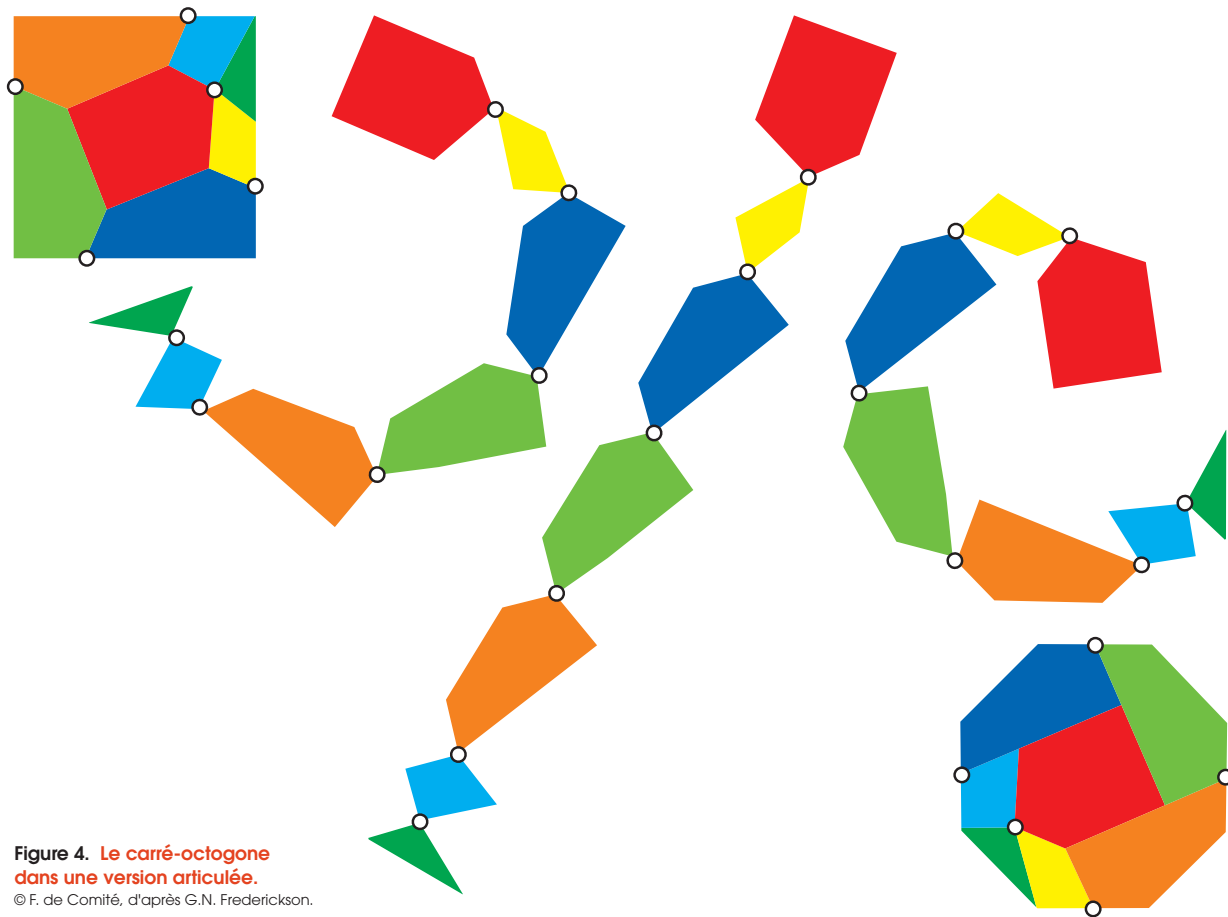


Figure 4. Le carré-octogone dans une version articulée.
© F. de Comité, d'après G.N. Frederickson.



IMPOSSIBLE !

Pour cela, Max Dehn a associé à chaque polyèdre... la somme de tous les couples constitués d'une part de la longueur d'une arête, et d'autre part de l'angle entre les deux faces qui partagent cette arête. Cela vous choque peut être mais les mathématiciens savent définir des règles de calcul sur d'autres objets que des nombres, et, par exemple, sur des couples de nombres.

Il a ensuite montré que cette somme est commune à tous les polyèdres qui s'obtiennent les uns à partir des autres par découpages en polyèdres et réassemblage. On l'appelle pour cette raison *l'invariant de Dehn* du polyèdre. Par conséquent, si vous considérez deux polyèdres admettant un invariant de Dehn différent, vous êtes certain qu'il est impossible de passer de l'un à l'autre par dissections polygonales.

Il a alors suffi à Dehn de trouver deux polyèdres de même volume ayant deux invariants de Dehn différents pour montrer que le problème de Bolyai ne se généralise pas aux polyèdres. Il n'a pas eu à chercher

très loin car un tétraèdre régulier (soit une pyramide à quatre faces triangulaires et équilatérales identiques) et un cube de même volume n'ont pas le même invariant de Dehn (on peut montrer que l'invariant de Dehn du cube est nul, contrairement à celui du tétraèdre). Ce qui prouve qu'il est impossible de passer de l'un à l'autre par découpages en polyèdres et réassemblage. Ce contre-exemple suffit pour répondre par la négative à la question posée par Hilbert. Plus tard, Dehn démontrera que chacun des cinq polyèdres réguliers (fig. 5) a un invariant de Dehn différent.

ET DES POLYÈDRES ARTICULÉS ?

Pour pouvoir décomposer un polyèdre en pièces polyédriques permettant d'en construire un autre, il faut donc qu'ils aient le même volume et le même invariant de Dehn. Mais est-ce suffisant ? En 1965, le mathématicien Jean-Pierre Sydler (1921-1988) a montré que oui. Et là on se prend à rêver à des polyèdres aux noms



Figure 5. Vous devez construire un volume dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques. Vous ne parviendrez qu'à fabriquer cinq volumes différents (dans le sens des aiguilles d'une montre sur la photographie) : le cube, le dodécaèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, et le tétraèdre. Max Dehn a montré qu'il est impossible d'imaginer un puzzle de pièces polyédriques permettant de construire à la fois deux de ces volumes. © G. Reuiller.

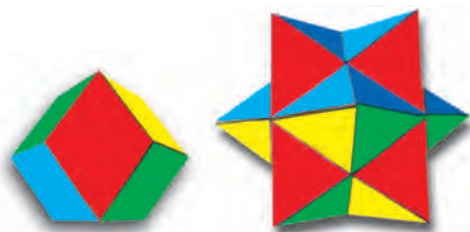


Figure 6. Le dodécaèdre rhombique et le dodécaèdre rhombique étoilé. Le dodécaèdre rhombique possède 12 faces en forme de losanges identiques. La version étoilée s'obtient en collant des pyramides sur chacun de ces losanges. © J.J. Dupas.

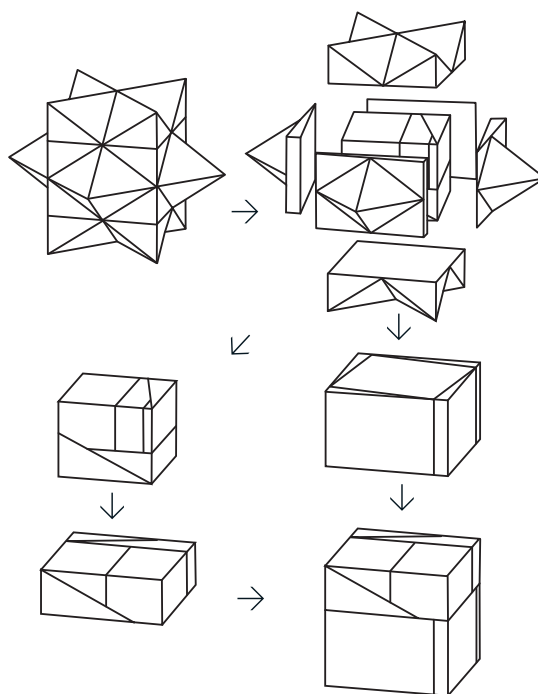


Figure 7. Transformation d'un dodécaèdre rhombique étoilé en un cube, grâce à une dissection en 12 pièces polyédriques. © G. Theobald.

exotiques comme l'octaèdre tronqué, le dodécaèdre rhombique ou même le dodécaèdre rhombique étoilé (fig. 6) qui, ayant tous les trois un invariant nul comme celui du cube, peuvent se décomposer en polyèdres qui, réassemblés, forment un cube. Que de beaux puzzles en perspective (fig. 7)!

Vous vous posez peut-être maintenant la question suivante : est-il possible de trouver une dissection polyédrique articulée entre deux polyèdres ayant le même volume et le même invariant de Dehn ? Dans ce cas, les charnières ne correspondraient plus à des sommets mais à des arêtes entières. Bonne nouvelle : vous n'aurez pas à attendre la réponse car l'équipe de six mathématiciens déjà citée y a aussi répondu. Deuxième bonne nouvelle : la réponse est encore oui. Avouez que cela laisse imaginer des puzzles 3D de toute beauté... Et si en plus je vous dis que ces résultats pourraient avoir des applications dans les nanotechnologies, cela devrait vous convaincre que faire des « maths façon puzzle » est une riche idée ! **G. R.**

Pour en savoir plus

Sur les sites de Gavin Theobald et de Greg Frederickson, grands spécialistes de ces questions, vous trouverez de nombreuses dissections de polygones et de polyèdres, articulées ou non :

- <http://home.btconnect.com/GavinTheobald/Index.html>
- <http://www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book2.html>

L'article de Jean-Paul Delahaye « La géométrie du bricolage », dans le *Pour la science* n° 374, vous donnera les détails de la démonstration des dissections polygonale et polyédrique articulées. Vous pouvez aussi consulter son livre *Les inattendus mathématiques* (éditions Belin-Pour la science), et notamment, sur ce sujet, les chapitres 6 et 7.