
Illustration P. Jeener © C. Judei.

Formes mathématiques

# Un film de savon sous toutes ses formes

Lorsque vous plongez dans de l'eau savonneuse un fil de fer formant un contour rigide, vous créez un film de savon qui s'appuie sur ce contour. Selon la forme du fil et la façon de le plonger dans le liquide, vous pouvez créer des surfaces différentes. Comment décrire mathématiquement la forme de ces surfaces ?

PAR **ROMAIN ATTAL,** MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

En plongeant un anneau dans une solution savonneuse et en soufflant dessus, vous emprisonnez un certain volume d'air dans une bulle. Les forces d'attraction qui s'exercent entre les molécules du liquide obligent alors le film à prendre une forme d'aire minimale. Si vous obtenez une bulle c'est parce que la sphère est la surface fermée dont l'aire est la plus petite, à volume intérieur fixé. De manière générale, si le film de savon s'appuie sur une courbe lisse et sans croisement, sa forme à l'équilibre est encore une surface d'aire minimale.

On peut constater expérimentalement l'existence d'une surface d’aire minimale s'appuyant sur une telle courbe, mais peut-on la démontrer mathématiquement ? Ce problème a été posé par Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en 1760 et étudié au XIXe siècle par le physicien belge Joseph Plateau (1801-1883). C'est pourquoi on l'appelle « le problème de Plateau ». L'existence d'une telle surface résulte d'un théorème

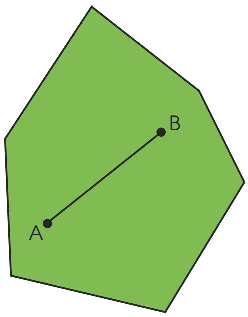



Figure 1a. Un ensemble convexe.

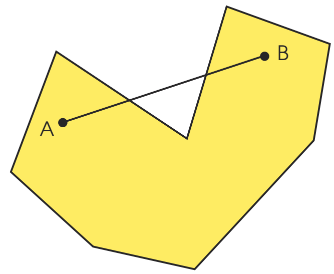
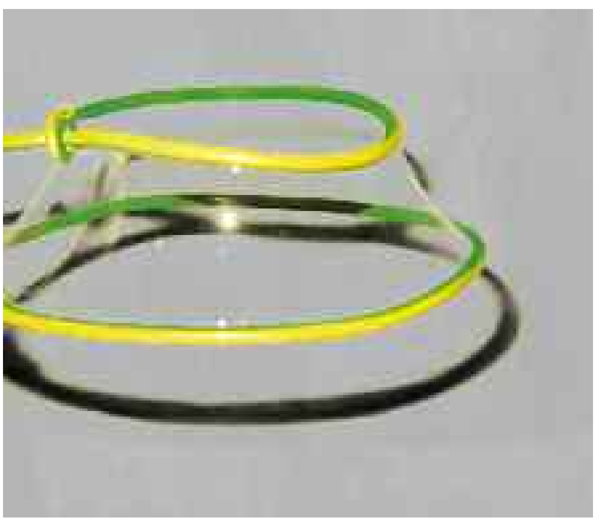



Figure 1b. Un ensemble non convexe.



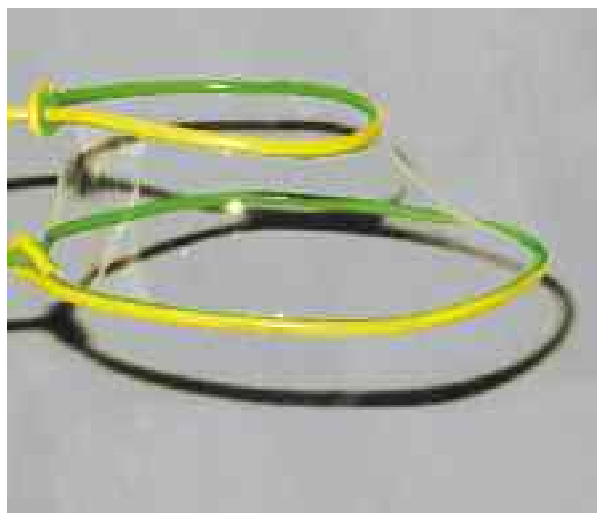


Figure 2. Une portion de caténoïde en film de savon. © C. Rousselin.
Figure 3. Si vous décalez les contours circulaires, ce n'est plus une caténoïde ! © C. Rousselin.

dont la preuve, due indépendamment aux mathématiciens Jesse Douglas et Tibor Radó, a été donnée dans les années 1930.

## ELLE EXISTE MAIS EST-ELLE UNIQUE ?

Généralement, l'unicité d'une telle surface n'est pas garantie : il n'y a pas forcément une seule solution au problème de Plateau. Cependant, pour certains contours, il n'existe effectivement qu'une seule surface minimale qui s'appuie dessus. C'est le cas lorsque le contour est contenu dans un plan ou lorsqu'il existe un plan sur lequel l'ombre du contour est une courbe sans point multiple bordant un ensemble convexe. Un point de l'ombre est dit « multiple » lorsqu'au moins deux points du contour se projettent dessus. Un ensemble X est dit « convexe » si, quel que soit le couple de points A et B de X, le segment [AB] est entièrement contenu dans cet ensemble X (fig.1a et 1b).
Mais il peut aussi y avoir non-unicité : si le contour est constitué de deux cercles parallèles, on peut

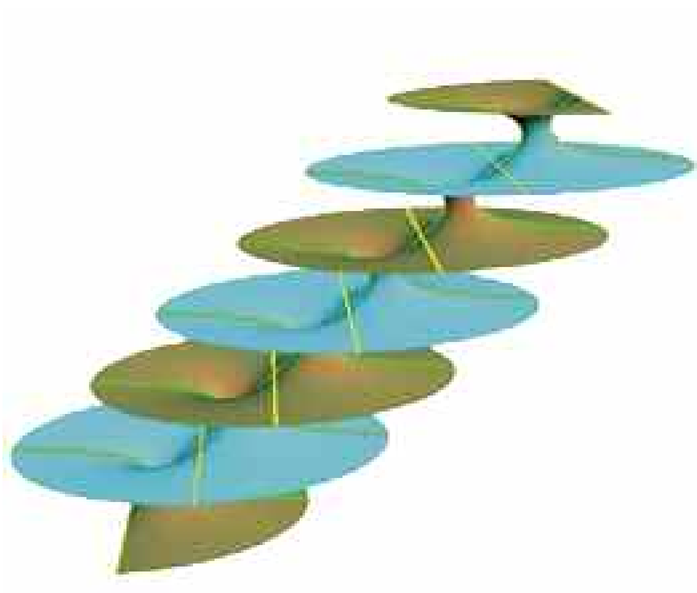


Figure 4. Une surface minimale de Riemann.

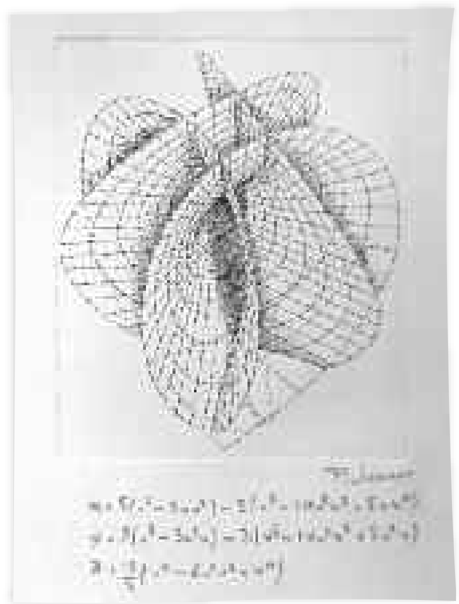


Figure 5. Cette surface paramétrée est aussi une surface minimale qui s'auto-intersecte. Illustration P. Jeener © C. Judei.

former soit deux disques séparés soit une surface en forme de manchon évasé. Lorsque les deux cercles sont parallèles et de même axe (mais pas nécessairement de même rayon), ce manchon évasé est la portion d'une surface appelée « caténoïde » (fig. 2). Si vous coupez cette surface par un plan contenant l'axe des deux cercles, la section sera toujours la même. On dit que la caténoïde est invariante par rotation autour de son axe, ou que c'est une « surface de révolution ».

## UN GESTE PAS SI ANODIN QUE CELA

Maintenant, déplaçons les deux cercles tout en les gardant parallèles. Ils n'ont alors plus le même axe et le film de savon change légèrement de forme (fig. 3). En fait, le résultat n'est plus une portion de caténoïde, mais celle d'une toute autre surface qui n'est pas invariante par rotation autour d'un axe. Il s'agit d'une portion d'une surface périodique qui se rapproche de plans parallèles régulièrement espacés comme celle de la figure 4. Ces surfaces minimales ont été construites et étudiées par Bernhard Riemann (1826-1866).
Il existe aussi une méthode, due à Albert Enneper et Karl Weierstrass, pour construire des surfaces minimales à partir de fonctions d'une variable complexe. On peut aussi utiliser des représentations paramétriques (fig.5).
Cette petite expérience nous enseigne que deux surfaces de formes voisines localement peuvent être très différentes globalement et que les surfaces minimales sont un sujet d'étude pour les mathématiciens qui dépasse largement la simple description de films de savon. **R. A.**

## Pour en savoir plus

Sur le site du Palais de la découverte (à la page : http://www.palais-decouverte.fr/index.php?id=1843), vous trouverez des explications supplémentaires sur les surfaces minimales et les films de savon, illustrées par des vidéos montrant différentes expériences sur ce thème.

Dans la salle « Mathématiques » du Palais de la découverte, sur le balcon, vous pourrez voir les gravures de l'exposition « Patrice Jeener explore les mathématiques », dont celles présentées dans cet article, ainsi que bien d'autres encore, représentant des formes mathématiques que l'artiste a reproduites à la main pour leur donner plus de vie.

Pour aller plus loin

# Comment caractériser une surface minimale ?

**Parmi les surfaces lisses s'appuyant sur un contour donné, les surfaces minimales sont celles dont l'aire est la plus petite possible.** Pour en donner une description plus large que le simple exemple des films de savon, il faut d'abord observer les surfaces localement. La géométrie locale des surfaces a été étudiée par Carl Friedrich Gauss (1777-1855) au début du XIXe siècle. Pour décrire une surface lisse au voisinage d'un point M, on utilise des objets géométriques simples (plans, droites, cercles) qui permettent d'approcher au plus près possible la portion de surface étudiée (fig. I) :

– le « plan tangent » à la surface en M est le plan le plus proche de la surface et passant par M (c'est donc l'analogue bidimensionnel de la notion de droite tangente à une courbe),

– la « droite normale » est la droite qui est perpendiculaire au plan tangent et qui passe par M,

– les « plans normaux » sont les plans qui contiennent la droite normale (ils sont donc perpendiculaires au plan tangent).

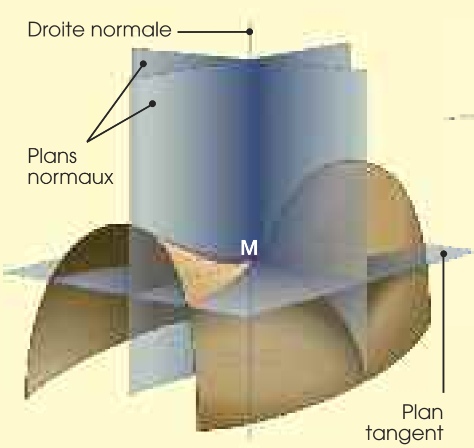



Figure I. Éléments utilisés pour décrire une surface au voisinage d'un point.



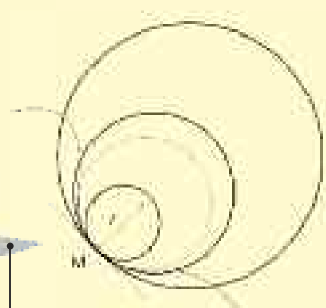



Figure II. La surface étudiée coupe un plan normal en M suivant une courbe lisse. Parmi tous les cercles tangents à cette courbe dans ce plan, le cercle bleu s'en approche au mieux. C'est le cercle osculateur en M dans ce plan.

## LE CERCLE QUI « EMBRASSE » LE MIEUX LA COURBE

Pour approcher la courbe d'intersection de la surface et d'un plan normal quelconque, on pourrait utiliser la droite tangente à cette courbe au point M, mais il est plus judicieux de s'intéresser au cercle qui, parmi tous les cercles tangents à cette courbe en M, est situé le plus près possible de la courbe (fig. II). On l'appelle le « cercle osculateur » de la courbe en M. On peut montrer que ce cercle osculateur existe toujours pour une surface lisse (quitte à considérer une droite comme un cercle de rayon infini). Son centre est sur la droite normale en M. Bien sûr, le rayon du cercle osculateur peut varier en fonction du plan normal dans lequel il se trouve. Sa courbure, c'est-à-dire l'inverse de son rayon, aussi : quand le plan normal tourne autour de la droite normale, cette courbure passe par un minimum, $k_{min}$, et par un maximum, $k_{max}$. Ces deux valeurs sont appelées les « courbures principales » de la surface au point M. On définit alors localement deux autres notions de courbure :

– la courbure moyenne, $H = (k_{min} + k_{max})/2$ ;

– la courbure totale, $K = k_{min}\, k_{max}$.

Par exemple, pour une portion de plan, les deux courbures principales s'annulent ($k_{min} = k_{max} = 0$) donc $H = 0$ et $K = 0$ partout. Sur un cylindre de rayon R, on a $k_{min} = 0$ et $k_{max} = 1/R$ donc $H = 1/2R$ et $K = 0$. Sur une sphère de rayon R, on a $H = 1/R$ et $K = 1/R^2$.

## QUAND LA SURFACE EST MINIMALE

On peut démontrer que la condition d'aire minimale, qui exprime l'équilibre mécanique de chaque portion de la surface soumise à la tension des portions voisines, se traduit par l'annulation de la courbure moyenne : $H = 0$. En particulier, cela implique que $k_{min}$ et $k_{max}$ sont de signes opposés et $K \leq 0$.