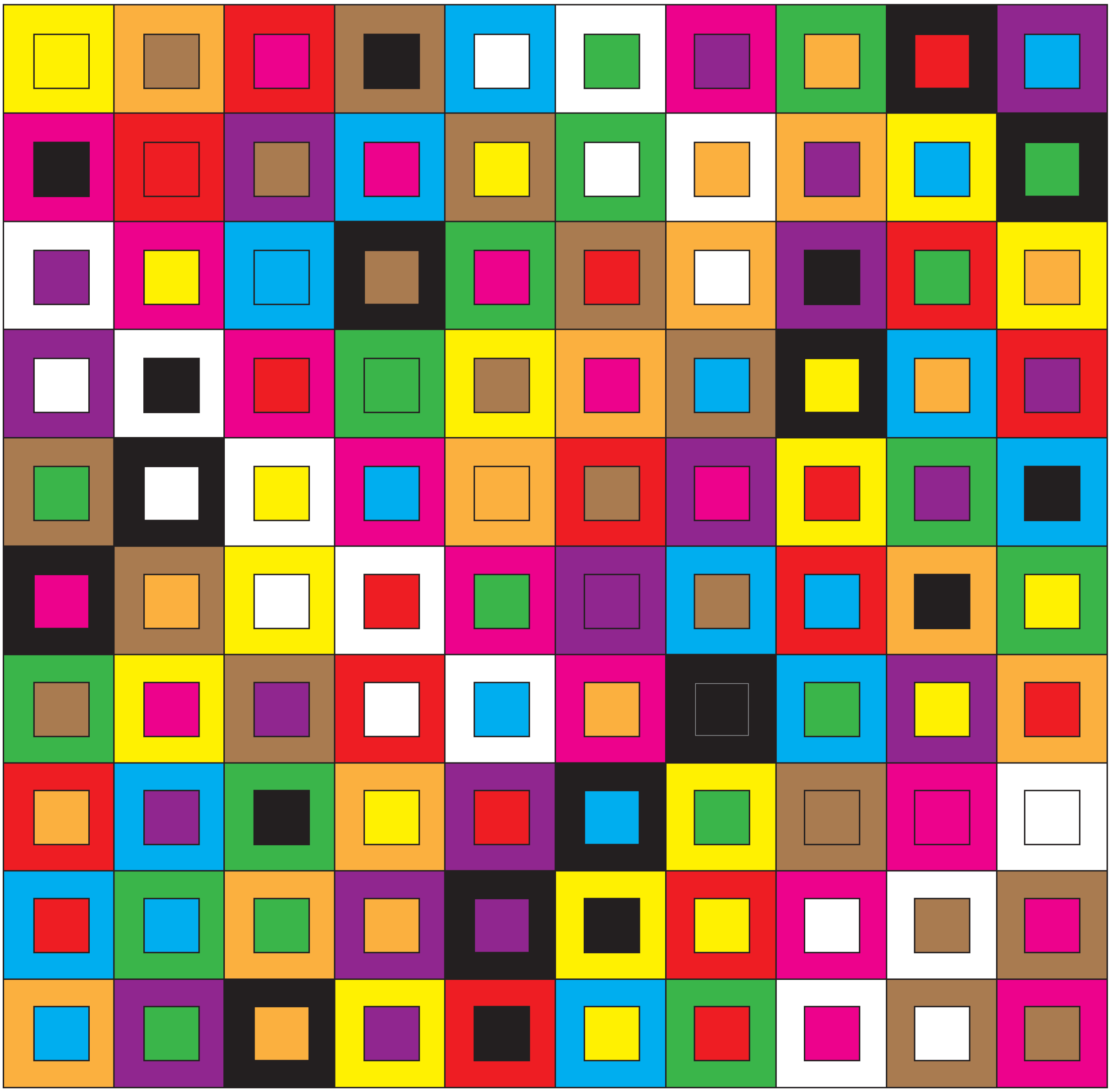

Formes mathématiques

Carrément magique !

Cette image ressemble un peu à un tableau de Victor Vasarely (1906-1997). Un rapide coup d'œil laisse à penser que le désordre y règne en maître. En fait, il s'y cache une structure simple mais, paradoxalement, très difficile à obtenir. Quelle est donc cette forme mathématique qui a mis plus de 170 ans à être trouvée ?

PAR **GUILLAUME REUILLER**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

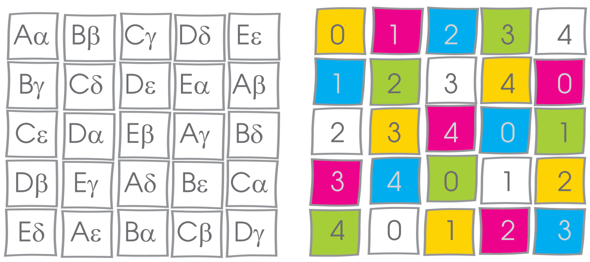

Figure 1. Deux carrés gréco-latins d'ordre 5. Le premier est « à la Euler » : dans chaque case figure un couple d'une lettre latine et d'une lettre grecque, sans que la même lettre (grecque ou latine) ne figure deux fois sur la même ligne ou la même colonne. Le second est plus coloré… À vous de vérifier qu'il s'agit bien de deux représentations différentes du même objet.

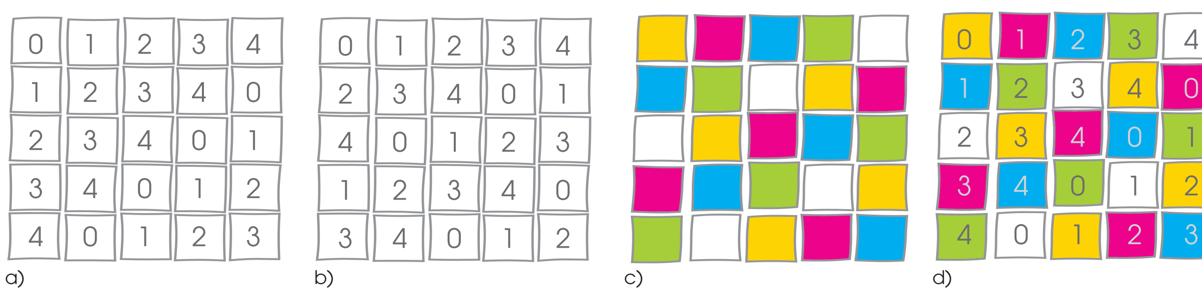

Figure 2. Deux carrés latins d'ordre 5 orthogonaux (a et b). Vous pouvez les superposer pour obtenir un carré gréco-latin. Pour cela, coloriez le second en associant à chaque chiffre une couleur (c). Ensuite, il suffit de construire une nouvelle grille, de la remplir avec des chiffres comme dans le premier carré latin et la colorier comme dans le dernier. Le résultat (d) est un carré gréco-latin d'ordre 5.

Prenez un jeu de 32 cartes. Ne gardez que les as et les figures. Essayez de placer ces seize cartes selon quatre lignes et quatre colonnes ne contenant jamais deux fois la même couleur (pique, cœur, carreau, trèfle) ou la même valeur (valet, dame, roi, as). Ce casse-tête mathématique est un grand classique, présent par exemple dans l'ouvrage de Jacques Ozanam (1640-1717) *Récréations mathématiques et physiques* de 1723. En termes plus précis, il s'agit de réaliser ce qui s'appelle un « carré gréco-latin ». L'origine de ce nom vient du fait que le génial Leonhard Euler (1707-1783), qui a véritablement fait entrer ce type d'objets dans le champ des mathématiques, n'utilisait pas les valeurs et couleurs des cartes à jouer mais les lettres grecques et latines. Bien sûr, vous pouvez aussi remplacer les lettres latines par des nombres et les lettres grecques par des couleurs (fig. 1). L'essentiel est d'avoir deux paramètres pouvant prendre n valeurs différentes et vérifiant les contraintes sur n lignes et n colonnes. Le résultat est un carré gréco-latin « d'ordre n ».

COMMENT PROCÉDER ?

Une manière de résoudre le problème des seize cartes consiste à « oublier » l'un des paramètres (par exemple la valeur) et à répartir les cartes comme si de rien n'était en ne considérant que les contraintes sur le paramètre restant (la couleur dans notre exemple). Concrètement, vous commencez par construire une grille de cartes sans jamais avoir la même couleur sur une même ligne ou une même colonne, qu'importent les valeurs. Le résultat s'appelle un « carré latin », et vous rappelle peut-être les grilles de sudoku, qui en sont un cas particulier.
Comment passer alors de votre carré latin (un paramètre) à votre carré gréco-latin (deux paramètres) ? Une méthode consiste à fabriquer, avec un autre jeu de cartes, un second carré latin où, cette fois-ci, aucune valeur n'est présente deux fois dans la même ligne ou la même colonne (en revanche, en ce qui concerne les couleurs des cartes…). Si vous avez de la chance (ou de l'astuce !), vous pourrez superposer les deux carrés latins pour obtenir un carré gréco-latin. Ainsi, la première carte de votre carré gréco-latin sera celle qui aura la couleur de la première carte de votre premier carré latin et la valeur de la première carte du deuxième carré latin. Et ainsi de suite pour les quinze autres cartes.
Hélas, cela ne marche pas toujours car il faut que dans le carré final, chaque carte soit présente une et une seule fois. Quand cela arrive, on dit que les deux carrés latins sont « orthogonaux ». Construire un carré gréco-latin, ce n'est donc rien d'autre que trouver un couple de carrés latins orthogonaux (fig. 2).

LE PROBLÈME DES 36 OFFICIERS

Mais est-il toujours possible, quel que soit l'ordre n considéré, de construire deux carrés latins d'ordre n orthogonaux ? Cette question est exactement celle que

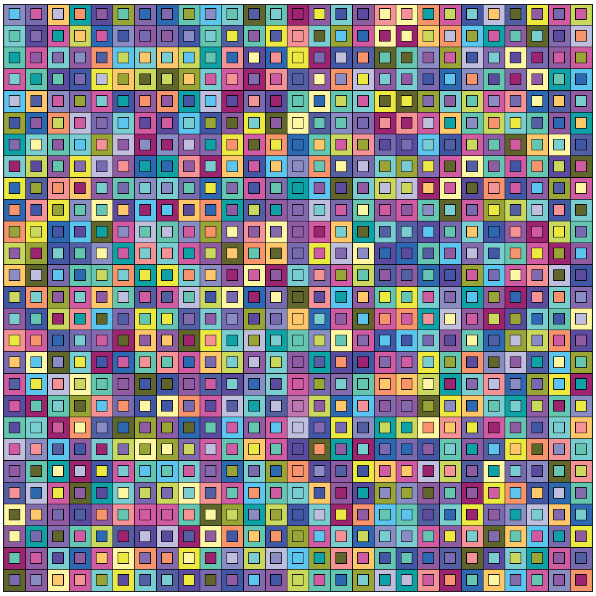

Figure 3. Carré gréco-latin d'ordre 27. Au départ, un carré de 27 x 27 = 729 cases contenant chacune un carré central entouré d'une bordure externe. Vous disposez de 27 couleurs différentes, et il faut que sur chaque ligne et chaque colonne, chaque couleur soit représentée une et une seule fois dans le carré central (respectivement dans la bordure extérieure). Le résultat comporte 729 cases toutes différentes.

→→→

se pose Leonhard Euler le 8 mars 1779 devant l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg. Il la reprend dans un mémoire publié en 1782 sous le titre *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques* et dont le point de départ est le « problème des 36 officiers » (à noter qu'à cette époque de sa vie, Euler est totalement aveugle et dicte ses travaux à ses proches). Prenez une assemblée de 36 officiers issus de six régiments différents, chaque régiment comportant six grades. Est-il possible de les mettre en rang selon un carré de six sur six, de telle manière que chaque ligne et chaque colonne comporte six grades et six régiments différents ? Vous l'avez compris, comme pour le problème des cartes à jouer, il s'agit de construire un carré gréco-latin (d'ordre 6 cette fois-ci). Mais admettez qu'il est quand même plus facile de se procurer et de manipuler des cartes à jouer que des officiers… La réponse d'Euler est la suivante : « Après toutes les peines qu'on s'est données pour résoudre ce problème, on a été obligé de reconnaître qu'un tel arrangement est absolument impossible, quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse. » Il faut s'appeler Euler pour oser affirmer qu'un problème est impossible à résoudre uniquement parce que l'on n'a pas réussi à le faire ! Cette sentence peu rigoureuse est-elle vraie ? Un peu de patience…

L'HYPOTHÈSE D'EULER

Au-delà de ce seul exemple, ce que veut Euler, c'est déterminer pour quelles valeurs de n il est possible de construire un carré gréco-latin d'ordre n. Pour n = 2, la réponse est évidente : c'est non (vous pouvez rapidement vous en convaincre en essayant). Mais existe-t-il d'autres valeurs de n pour lesquelles c'est impossible ? Curieusement, il est plus ou moins facile de répondre à cette question en fonction de la parité de n. En effet, pour n impair, aucun problème : il existe une méthode très simple qui fonctionne tout le temps (et qui était connue bien avant Euler puisqu'on la trouve dans un livre du mathématicien indien Narayana Pandit (1340-1400) de 1356). Nous vous la présentons dans la rubrique « La science à portée de main » de ce numéro. Un carré gréco-latin d'ordre 27 comme celui de la figure 3, pourtant visuellement impressionnant, n'est donc pas vraiment difficile à obtenir.

Quand n est pair, tout se complique. Euler distingue deux cas : n multiple de 4 (il parle de « pairement pair ») et n pair mais non multiple de 4 (il parle d'« impairement pair »). Dans le premier cas, Euler démontre qu'il existe nécessairement des couples de carrés latins d'ordre n orthogonaux entre eux et établit des méthodes pour les obtenir. Mais dans le second, il n'y arrive pas et suppose que c'est impossible. Autrement dit, Euler émet l'hypothèse suivante (que l'on appelle conjecture tant qu'elle n'est pas démontrée) : il n'existe pas de paire de carrés latins orthogonaux pour n impairement pair, c'est-à-dire de la forme 4k + 2, où k est un nombre entier positif quelconque. Donc pour n = 2, 6, 10 et ainsi de suite de 4 en 4.

EULER A UN PEU RAISON…

C'est seulement en 1900, dans un article sobrement intitulé « Le problème des 36 officiers », que le mathématicien Gaston Tarry (1843-1913) démontre la justesse de l'hypothèse d'Euler dans le cas où n = 6. Sa démonstration, qui va nécessiter l'aide de son frère, est plutôt fastidieuse : Tarry recense de manière exhaustive tous les carrés latins 6 × 6, qu'il classe en 17 catégories. Ensuite, au cas par cas, il montre que l'on ne peut pas trouver de couple de carrés orthogonaux parmi eux. Après lui, et jusque récemment, d'autres mathématiciens vont se pencher sur le problème des « 36 officiers », pour trouver

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Figure I.

Une jolie découverte

Peut-être trouvez-vous l'image en entrée d'article esthétique, même s'il s'agit de mathématiques... Ce carré gréco-latin, obtenu par le mathématicien Parker, peut aussi être représenté en utilisant les cent premiers nombres (tous écrits avec deux chiffres) entre 00 et 99 (fig. I). Le résultat est alors tel que, sur chaque ligne et chaque colonne, chaque chiffre entre 0 et 9 est représenté une et une seule fois comme unité (respectivement dizaine). Et, sous cette forme, il constitue en plus un carré magique : sur chaque ligne et chaque colonne la somme des termes est la même. En fait, de manière beaucoup plus profonde, les notions de carrés magiques et de carrés gréco-latins sont très liées l'une à l'autre, comme le suggère l'article de la rubrique « La science à portée de main » de ce numéro.
Aviez-vous remarqué que ce carré gréco-latin d'ordre 10 contient en bas à droite un petit carré gréco-latin d'ordre 3 (cases coloriées en jaune foncé sur la figure I) ? En fait, tous les carrés gréco-latins d'ordre 10 trouvés par Parker renfermaient un carré gréco-latin d'ordre 3. Est-ce un résultat général ? On l'a longtemps cru, jusqu'à ce que l'on obtienne plusieurs contre-exemples.

une démonstration plus simple et plus élégante de ce problème, qui ne passe pas par le cas par cas. De même, suite à la preuve de Tarry, plusieurs mathématiciens essayèrent de démontrer l'hypothèse d'Euler dans le cas général. Certains d'entre eux crûrent même y parvenir… mais à chaque fois, on finit par trouver des erreurs dans leurs raisonnements. Il est clair que la méthode employée par Tarry ne pouvait guère se généraliser à des valeurs de n plus grandes que 6… Ne serait-ce que recenser tous les carrés latins d'ordre 10 est un travail de longue haleine que les premiers ordinateurs n'arriveront pas à mener jusqu'au bout.

…ET FRANCHEMENT TORT

C'est en partie la raison pour laquelle il faudra attendre la fin des années 1950 pour avoir la réponse complète et définitive au problème posé par Euler. En effet, à partir de 1958, les trois mathématiciens E.T. Parker, R.C. Bose et S.S. Shrikhande vont faire un ensemble de découvertes déterminantes au sujet des carrés gréco-latins. Ainsi, en mars 1959, Bose et Shrikhande publient dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences américaine* un carré gréco-latin d'ordre 22 qui est un nombre « impairement pair ». Alors que la plupart des mathématiciens ayant travaillé sur le sujet avaient essayé de démontrer que l'hypothèse d'Euler était juste, ce contre-exemple montre le contraire.
La même année, Parker prend connaissance des résultats obtenus par ces deux mathématiciens, et trouve une nouvelle méthode qui le conduit à la construction d'un carré gréco-latin d'ordre 10. Vous l'aviez compris : c'est lui qui est représenté en tout début d'article. En quelque sorte, il s'agit de la solution au problème des 100 officiers…
Le résultat est annoncé lors du congrès annuel de la Société mathématique américaine de 1959. L'hypothèse d'Euler était si célèbre, même au-delà de la communauté mathématique, que le *New York Times* du 26 avril 1959 met l'événement en une de son journal en titrant : « Une conjecture mathématique majeure proposée il y a 177 ans est démentie ».
Enfin, en 1960, Parker, Bose et Shrikhande démontrent ensemble qu'Euler avait « vraiment » tort : en fait, il n'est impossible de réaliser des carrés gréco-latins d'ordre n que pour n = 2 et n = 6. Étonnant, non ? **G. R.**

Pour en savoir plus

Cet article a peut être réussi à vous convaincre que des problèmes d'énoncé simple et ne nécessitant que peu de bagage mathématique peuvent se révéler d'une très grande richesse et être à l'origine de recherches de haut vol. Et surtout, ils peuvent s'avérer très amusants à résoudre. C'est tout l'esprit des « récréations mathématiques », ateliers que le département de mathématiques vous propose tous les jours de vacances, ainsi que tous les samedis et dimanches, au Palais de la découverte à partir de 16 heures. Nous serons heureux de vous faire jouer, et de vous aider à résoudre le problème des seize cartes si vous n'avez pas réussi tout seul. À bientôt ?