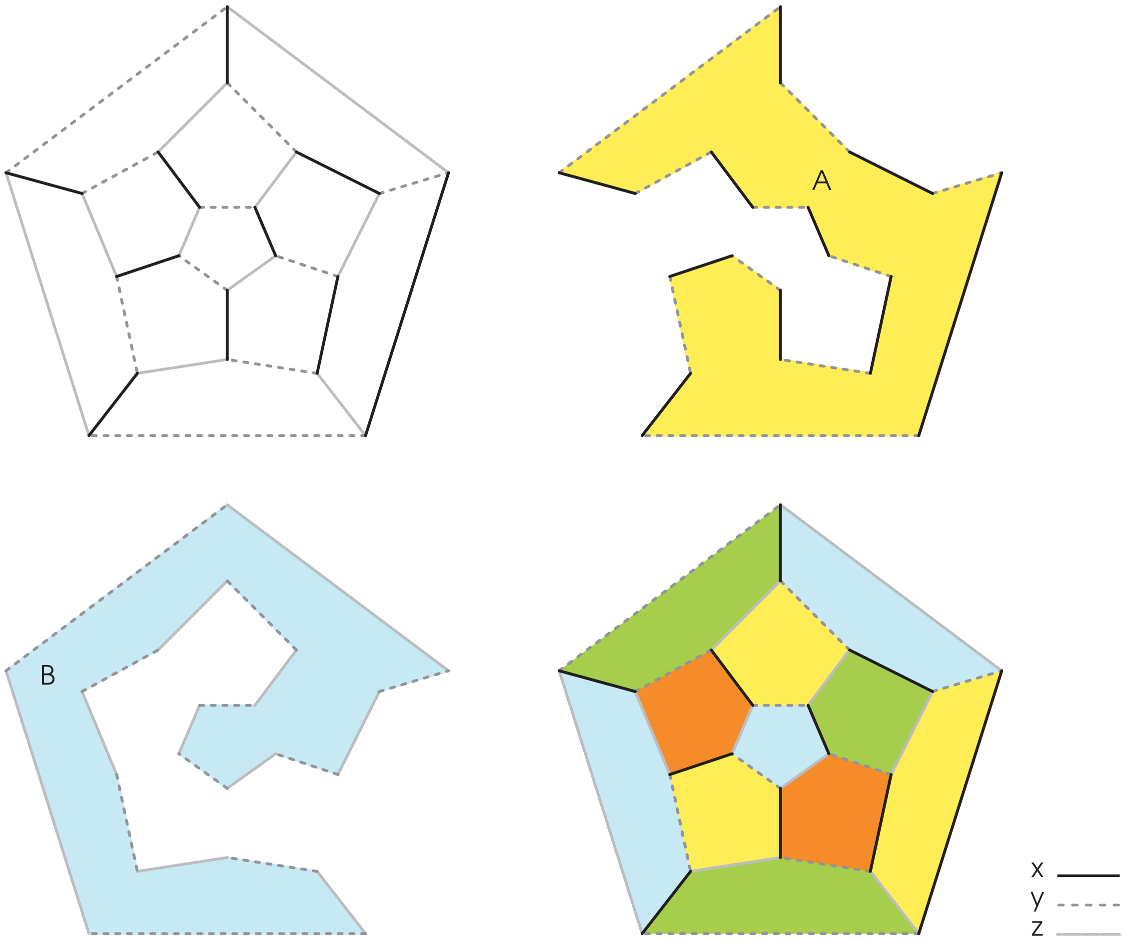


Formes mathématiques

Colorier des polyèdres

Avec quatre couleurs, il est possible de colorier n'importe quel polyèdre sphérique fini de sorte que les faces voisines aient des couleurs distinctes. Ce théorème est difficile à démontrer mais nous allons voir que, pour un polyèdre donné, il existe une méthode simple pour compter tous ces coloriages.

PAR **ROMAIN ATTAL,** MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

LES BONS COLORIAGES D'UN POLYÈDRE. Un polyèdre est une surface fermée obtenue en collant des faces polygonales le long de leurs arêtes de sorte que les sommets des faces coïncident. Si l'on obtient un ballon en le gonflant, le polyèdre est dit sphérique. Considérons un polyèdre sphérique, P, ayant un nombre fini de faces et dont chaque sommet est commun à trois faces, comme sur un cube. Choisissons maintenant quatre couleurs : jaune, orange, vert et bleu, par exemple. Un coloriage des faces de P tel que les

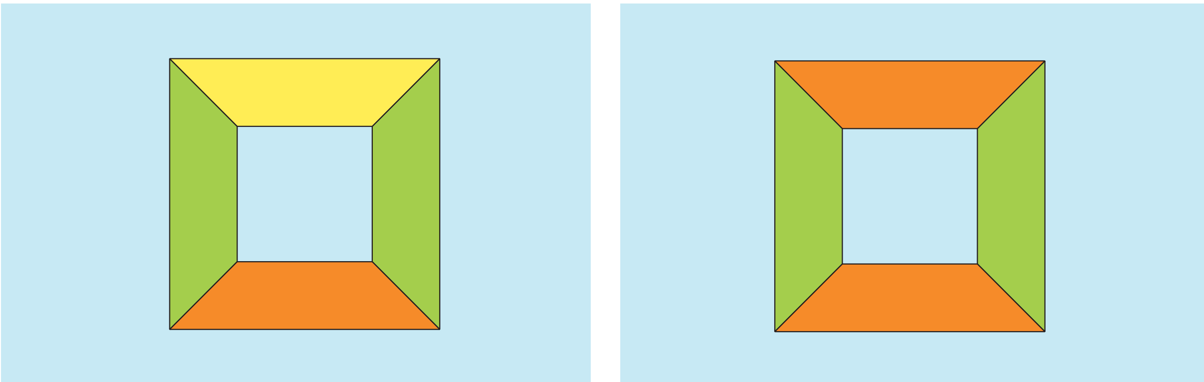


Figure 1. Deux coloriages inéquivalents du cube (les faces avant et arrière sont bleues).

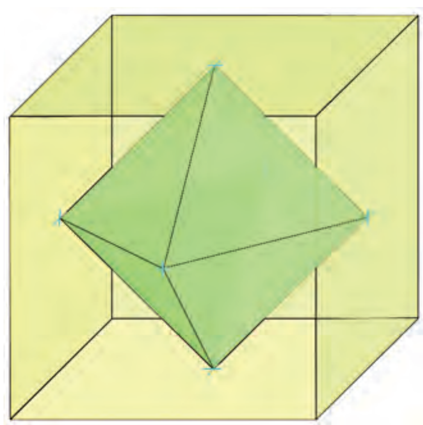


Figure 2. Le cube (P) et son dual, l'octaèdre (P*).

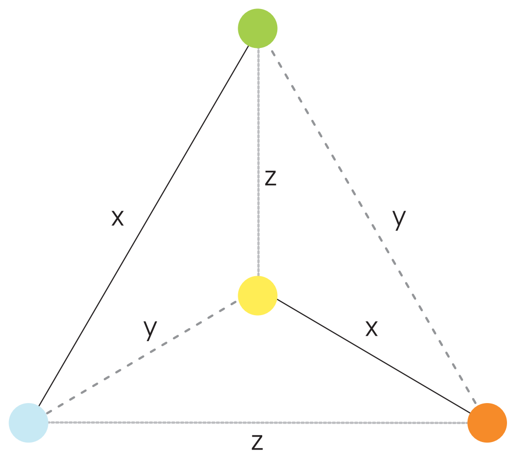


Figure 3. Le graphe G des couleurs.

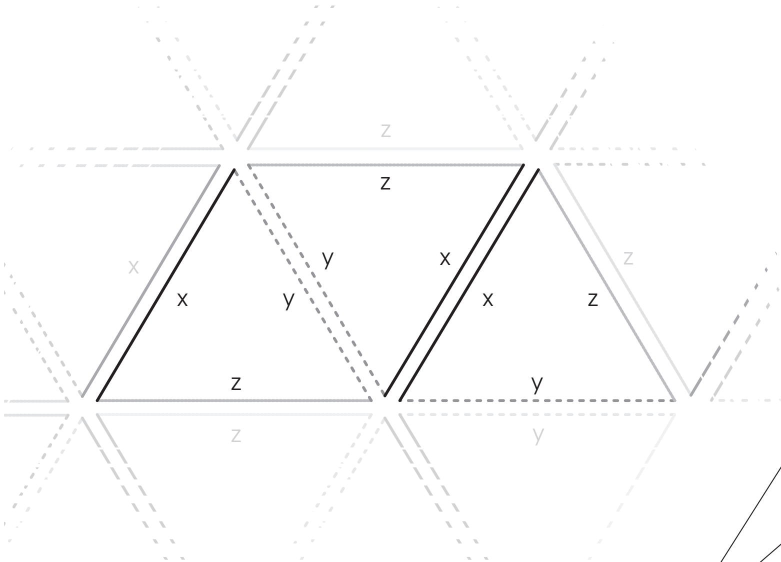
faces adjacentes ont des couleurs différentes est appelé un bon coloriage de P. La preuve du fait que tout polyèdre sphérique fini admet un bon coloriage a été donnée par K. Appel et W. Haken en 1977 puis simplifiée en 1996 par N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour & R. Thomas. Les preuves connues à ce jour sont longues et complexes au point qu'elles nécessitent l'usage d'un ordinateur. Notre objectif est ici bien plus modeste : présenter une méthode simple pour construire et compter tous les bons coloriages d'un polyèdre sphérique fini donné.

COMPTER LES COLORIAGES EN COLLANT DES TRIANGLES

Marquons un point à l'intérieur de chaque face de P et relions ces points par un trait lorsque les faces correspondantes sont adjacentes. On obtient ainsi un nouveau polyèdre sphérique, P*, dont les faces sont des triangles car les faces de P se rencontrent trois à trois. P* est appelé le dual de P. Si l'on recommence cette opération en partant de P*, on retombe sur un polyèdre de même nature que P. Ainsi, P** = P. Par exemple, le cube et l'octaèdre forment une paire de polyèdres duaux (fig. 2).

La forme exacte et les dimensions de ces polyèdres sont sans importance : l'essentiel est dans les relations de voisinage entre sommets, arêtes et faces. Ainsi, nous appellerons « triangle » tout triplet de sommets deux à deux voisins. À chaque arête de P correspond une arête commune à deux triangles de P*. Les sommets de P correspondent aux faces de P*, et les faces de P correspondent aux sommets de P*. Compter

→→→



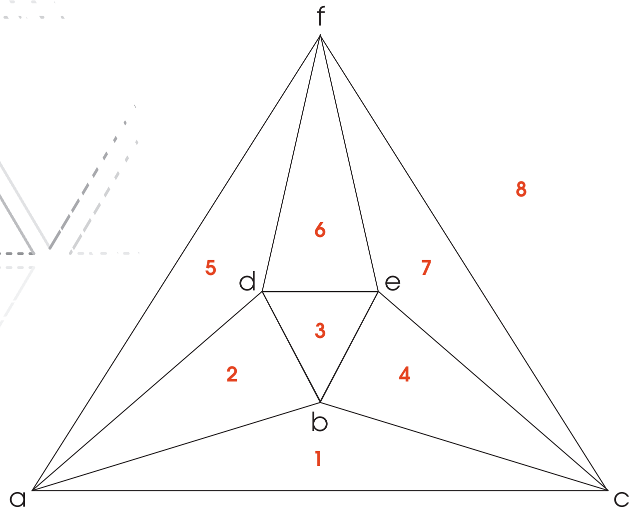


Figure 4. **Triangles élémentaires.**
Figure 5. **L'octaèdre projeté.**

les bons coloriages des faces de P équivaut donc à compter les bons coloriages des sommets de P*.
Disposons maintenant nos quatre couleurs aux sommets du graphe G représenté sur la figure 3. Chaque changement de couleur définit une arête de G, marquée x, y ou z. Par exemple, pour passer de jaune à orange ou de vert à bleu, on se déplace sur une arête marquée x. En faisant le tour d'un triangle de P*, on traverse trois arêtes de P donc il faut changer trois fois de couleur et revenir à la couleur de départ, de sorte que l'on décrit un triangle sur G. Chaque triangle de P* doit donc porter les lettres x, y et z sur ses côtés. Pour compter les bons coloriages de P, il suffit alors de compter les différentes façons de construire P* en collant arête contre arête des triangles marqués xyz sur leurs côtés (fig. 4), tout en faisant coïncider les côtés qui portent la même lettre.
Réciproquement, si l'on part d'une bonne numérotation des arêtes d'un polyèdre sphérique trivalent, on peut construire un bon coloriage de ses faces de la manière suivante (fig. p. 44). Les arêtes x (——) et y (- - - -) forment une courbe fermée qui délimite une région, A ( ), que l'on colorie en jaune.

Les arêtes marquées y (- - - -) et z (——) forment une autre courbe fermée qui délimite une autre région, B ( ), que l'on colorie en bleu. En coloriant l'intersection de A et B en vert et le complémentaire de leur réunion en orange, on obtient un bon coloriage des faces de la carte initiale.
Partons d'un sommet, a, de P* et posons un triangle sur la première face, abc. Puisqu'il existe six permutations de trois lettres, il y a six façons de poser ce premier triangle, représentées par la somme de mots xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx où le signe « + » représente le « ou » logique. Chaque fois que l'on colle un triangle, on peut le faire soit sur une seule arête (1) soit sur deux arêtes voisines (2) tout en faisant coïncider les lettres sur chaque arête. Dans le cas (1), il y a deux façons d'orienter le triangle. On remplace alors la lettre correspondant à l'arête de recollement par la somme des deux mots complémentaires de cette lettre :

x ——> yz + zy
y ——> zx + xz
z ——> xy + yx

Dans le cas (2), il y a deux possibilités (2a et 2b). Si les deux lettres voisines qui correspondent aux deux arêtes de recollement sont différentes (2a), on les remplace par

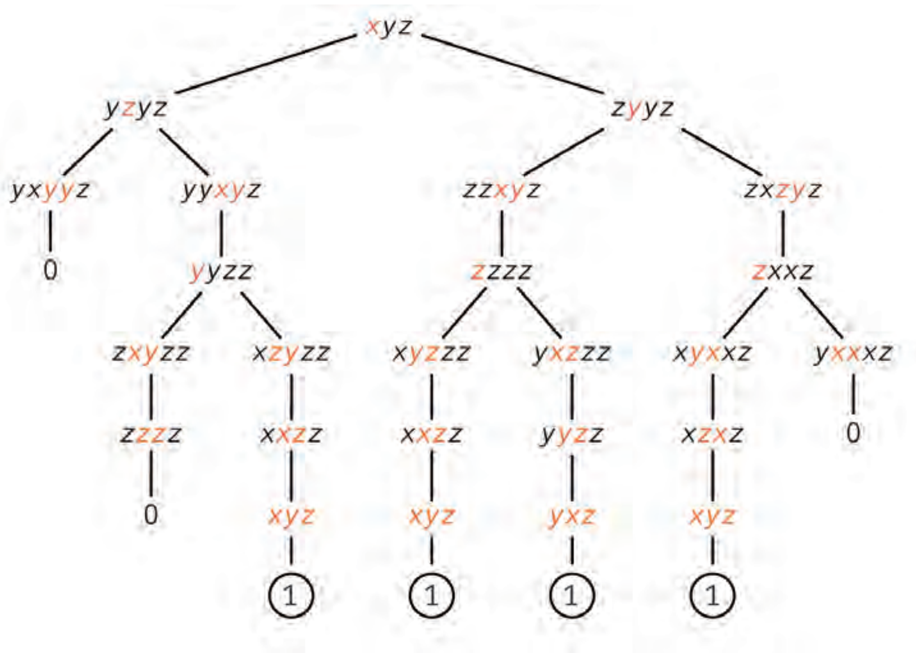


Figure 6. Les lettres écrites en orange sont remplacées par leur(s) complémentaire(s) au niveau suivant.

la lettre complémentaire. Si ces deux lettres sont égales (2b), on ne peut pas coller de triangle xyz. On obtient alors 0 et on supprime ce mot de la somme :

(2a) xy ——> z   yx ——> z   yz ——> x
zy ——> x   zx ——> y   xz ——> y
(2b) xx ——> 0   yy ——> 0   zz ——> 0

Après avoir collé un triangle xyz, on obtient une nouvelle somme de mots en appliquant la règle de distributivité. On ne peut coller le dernier triangle que si le dernier mot (de trois lettres) contient x, y et z. De tels mots comptent pour 1 et les autres comptent pour 0 :

xyz ——> 1   xzy ——> 1   yxz ——> 1
yzx ——> 1   zxy ——> 1   zyx ——> 1
xyx ——> 0   xyy ——> 0   etc.

Après avoir collé le dernier triangle, on obtient le nombre, K, de bons marquages des arêtes de P*. Puisque l'on avait quatre couleurs possibles pour la face initiale, a, le nombre de bons coloriages de P est égal à 4K.

L'EXEMPLE DU CUBE

Afin d'illustrer notre méthode, considérons un cube. Ses faces se rencontrent bien trois à trois en chaque sommet et sa triangulation duale est un octaèdre (fig. 5). Projetons l'octaèdre sur un plan pour obtenir le diagramme de la figure 6. Notons (a, b, c, d, e, f) ses sommets et collons les triangles dans l'ordre indiqué sur la figure 5, de sorte que les bords successifs définissent une suite de chemins passant par les sommets suivants :

a ——> abca ——> adbca ——> adebca ——> adeca ——> afdeca ——> afeca ——> afca ——> a

Les mots issus du terme xyz dans la somme initiale peuvent être disposés dans un arbre (fig. 6) ou en ligne :

1 ——> xyz
——> yzyz + zyyz
——> yxyyz + yyxyz + zxzyz + zzxyz
——> 0 + yyzz + zxxz + zzzz
——> zxyzz + xzyzz + xyxxz + yxxxz + xyzzz + yxzzz
——> zzzz + xxzz + xzxz + 0 + xxzz + yyzz
——> 0 + xyz + xyz + xyz + yxz
——> 4

Il existe donc 6 × 4 = 24 bons marquages des arêtes de P* et 4 × 24 = 96 bons coloriages des faces du cube. Si l'on tient compte des symétries du cube et des permutations des couleurs, il n'y a en fait que deux types de coloriages possibles pour les faces du cube. En effet, il ne peut y avoir que deux ou trois paires de faces opposées de même couleur et l'on obtient les deux types de coloriages inéquivalents représentés sur la figure 1. **R. A.**