

Formes mathématiques

Les codes identifiants ou comment sauver le Palais des flammes ?

Il faut installer un nouveau système de détection d'incendie au Palais de la découverte. Les détecteurs à placer sont capables, si on les « interroge », de signaler si un incendie s'est déclaré dans la pièce où ils sont installés ou dans une pièce voisine, sans préciser laquelle. Comment placer le moins de détecteurs possibles tout en étant certain d'identifier la pièce en feu et sauver le bâtiment des flammes ?

PAR MARION PASTORI, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

La méthode pour retrouver un élément suspect (la pièce en flammes) parmi d'autres identiques (toutes les pièces) va vous révéler ses secrets. En mathématiques, cette recherche s'appelle les codes identifiants. Pour comprendre cette notion, il faut d'abord découvrir ce qu'est un graphe (fig. 1). Il s'agit d'un ensemble de

sommets (points) reliés entre eux par des arêtes (traits). Le voisinage d'un sommet est l'ensemble des sommets qui lui sont reliés par des arêtes et lui-même. Sur la figure 1, le voisinage du point jaune est l'ensemble des points rouges et le point jaune. Les graphes sont très fréquemment utilisés pour modéliser des liens entre objets (plan de métro, réseaux sociaux, planisphère...).

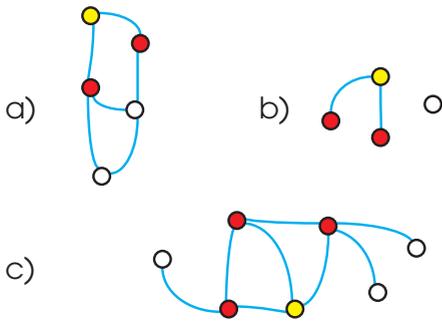


Figure 1. Exemples de graphes et de voisinages.

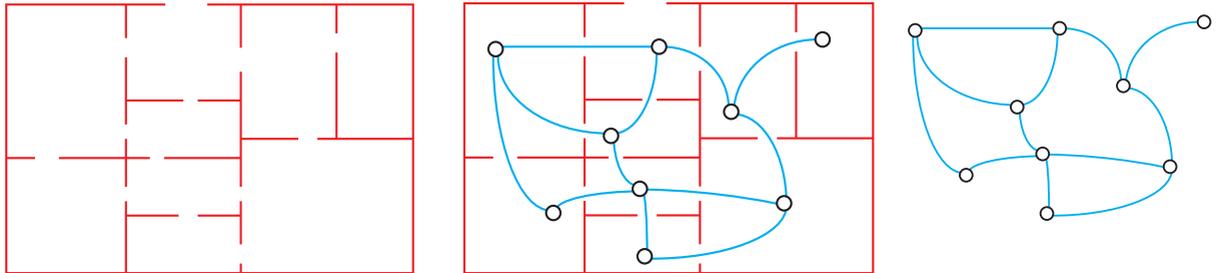


Figure 2. Un plan, et le graphe qui le modélise.

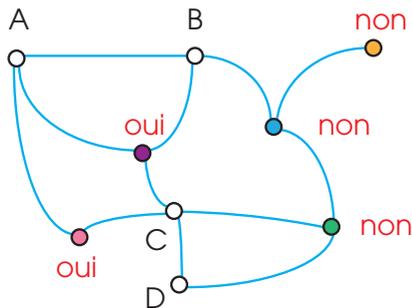


Figure 3. Voici les réponses de cinq détecteurs. Où est le feu ?

Dans notre cas (fig. 2), un sommet représente une pièce et il y a une arête entre deux sommets s'il existe une porte qui relie les deux pièces concernées.

QU'EST-CE QU'UN CODE IDENTIFIANT ?

Le problème qui nous intéresse est de retrouver une pièce où un incendie s'est déclaré grâce aux réponses données par les détecteurs placés dans certaines pièces. Cela revient à chercher un sommet particulier, s'il existe, parmi tous les sommets d'un graphe donné. On suppose que si un tel sommet existe il est unique. Par analogie mathématique entre le plan du bâtiment et un graphe, savoir où placer les détecteurs revient à savoir quels sommets du graphe questionner.

Pour cela nous allons créer un code, c'est-à-dire choisir un ensemble de sommets à « interroger ». Nous ne pouvons poser qu'une seule question au sommet choisi : « existe-t-il un sommet en feu dans ton voisinage ? ». Ainsi, s'il répond « oui », le sommet en feu peut être tout aussi bien lui que l'un de ses voisins. On appelle code identifiant d'un graphe, un code tel que, après avoir interrogé tous les sommets qui le composent, on puisse toujours affirmer : « il y a un sommet en feu et c'est celui là » ou bien « il n'y a pas de sommet en feu dans ce graphe », et ce, quel que soit l'endroit où l'incendie peut se déclarer.

Reprenons notre exemple de la figure 2 : nous choisissons d'interroger les cinq sommets colorés du graphe de la figure 3.

Les réponses de chacun des sommets sont les suivantes : Orange, Bleu et Vert répondent « non » et Rose et Violet répondent « oui ». Elles nous permettent d'affirmer qu'il y a un sommet en feu (au moins l'un des sommets interrogés a répondu « oui ») et de dire lequel. En effet, notre sommet en feu est voisin à la fois de Rose et de Violet, il y a donc seulement deux candidats A et C. Or notre sommet en feu n'est pas voisin de Vert, ce qui exclu C. Le sommet en feu est A. Si Vert n'avait pas fait partie du code, ce dernier ne serait pas identifiant car nous ne pourrions pas identifier le sommet A.

Pour que le code constitué de ces cinq sommets soit identifiant, il faut qu'il fonctionne pour retrouver n'importe quel sommet en feu, pas seulement dans le cas où c'est A. Bien sûr, pour trouver un sommet en

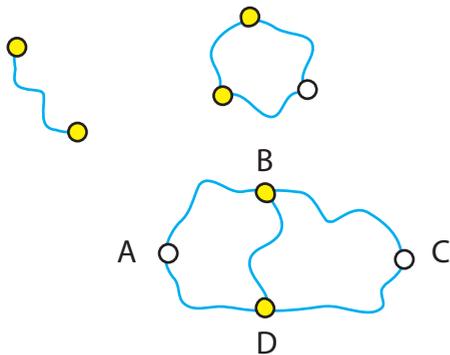


Figure 4. Exemples de graphes ne possédant pas de code identifiant : les points jaunes ont les mêmes voisinages.



feu, nous pourrions interroger tous les sommets pour être sûr de trouver celui qui nous intéresse (s'il existe), c'est-à-dire : placer des détecteurs dans toutes les pièces. Le problème consiste plutôt à trouver une solution optimale, c'est-à-dire qui nécessite d'interroger le moins de sommets possibles. Donc de trouver le code identifiant le plus petit pour placer le moins de détecteurs possibles.

Mais tous les graphes n'ont pas forcément de code identifiant : en effet, dès qu'un graphe contient au moins deux sommets ayant le même voisinage, il sera impossible de déterminer lequel des deux est en feu. Par exemple, sur le dernier graphe de la figure 4, si le feu se déclare en B, même en interrogeant tous les sommets, on ne pourra pas identifier l'origine du feu. En effet, tous les détecteurs vont répondre « oui » et l'on ne pourra pas trancher entre B et D. En revanche, si le feu se déclarait en A ou C, on pourrait l'identifier.

À vous de jouer

Les codes identifiants (ou adaptatifs) sont un moyen très simple de jouer seul (ou à deux).

Il vous suffit d'une feuille de papier et d'un crayon. Le jeu à un joueur consiste à dessiner un graphe quelconque et à essayer de trouver un code identifiant optimal... Vous aurez « fait » des maths tout en jouant. Vous pouvez essayer avec le graphe associé au plan du rez-de-chaussée du Palais de la découverte présenté en ouverture de cet article.

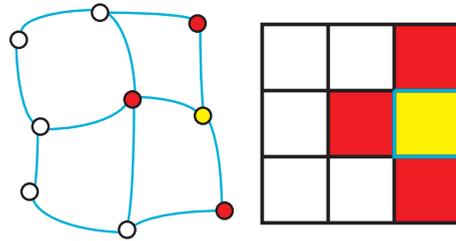


Figure 5. Un exemple de graphe simple, assimilable à la grille 3 × 3

DES RÉSULTATS SUR DES GRAPHES SIMPLES

Pour énoncer quelques résultats simples, regardons une classe particulière de graphes : ceux que l'on peut assimiler à des grilles (fig. 5). Un sommet du graphe peut alors être remplacé par une case, et une arête représente l'adjacence de deux cases. Dans ces classes de graphes, le voisinage est l'ensemble des cases adjacentes à la case choisie, c'est-à-dire toutes les cases qui ont un côté commun avec elle.

Sur une grille 3 × 3, qui correspond au graphe de la figure 5, un code identifiant est l'ensemble des cases violettes (fig. 6). Pourquoi les cases violettes ? Si toutes les cases répondent « non », c'est qu'il n'y a pas de case en feu. Si toutes les cases répondent « oui », c'est E qui est en feu (car c'est la seule case adjacente aux quatre cases du code). Si trois cases répondent « oui » la quatrième répond forcément « oui » aussi. Si B et D répondent « oui » et F et H répondent « non », c'est A qui est en feu. Et vous pouvez énumérer de la même manière tous les autres cas. Si une seule case répond « oui », c'est que c'est elle qui est en feu.

Pourquoi ce code composé de quatre sommets est-il optimal ? Il y a neuf cases en tout, donc dix cas possibles (le feu peut s'être déclaré dans une seule des neuf cases ou ne pas s'être déclaré). Si l'on interroge seulement trois cases, cela ne permet d'identifier que $2^3 = 8$ cas différents (oui oui oui – non oui oui – oui non oui – oui oui non – non non oui – non oui non – oui non non – non non non). Donc, il ne peut pas être identifiant puisque deux cas lui échappent. Il faut donc au moins quatre sommets dans le code, et comme on a obtenu une solution à quatre (figure 6) on peut dire que le code trouvé est identifiant.

D'autres résultats (existence d'un code identifiant et preuve de son optimalité) sont connus sur les grilles en

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Figure 6. En violet, un code identifiant de la grille 3 × 3.

forme de bandes de une ou deux cases de hauteur et de longueur infinie. Mais les démonstrations mathématiques deviennent rapidement complexes, même sur des graphes simples comme les grilles.

ET SI ON S'ADAPTAIT AUX RÉPONSES DES DÉTECTEURS ?

Ce problème de recherche d'un élément particulier (sommet en feu) existe également sous une forme adaptative. Contrairement à un code identifiant où ses sommets sont interrogés en même temps, un code adaptatif est un algorithme de questionnement où ses sommets sont interrogés un par un successivement, mais en adaptant le code au fur et à mesure des réponses données. Dans ce cas, la recherche d'optimisation consiste à minimiser le nombre d'interrogations. Pour mieux comprendre, nous pouvons identifier ce problème à un jeu à deux joueurs. Le premier joueur choisit secrètement, dans un graphe donné, un sommet (qui sera le sommet en feu à retrouver) ou bien décide qu'il n'y aura pas de sommet en feu. Le second joueur désigne un premier sommet qu'il souhaite interroger. Le premier joueur lui répond « oui » si le sommet en feu qu'il a choisi se trouve dans le voisinage de celui désigné par son adversaire, ou « non » dans le cas contraire. Ensuite, le second joueur peut s'« adapter » en fonction de la réponse et choisir de façon pertinente le sommet suivant à interroger. Bien entendu, nous supposons que le premier joueur ne ment pas.

Ce problème ressemble un peu au célèbre jeu du « Qui est-ce ? » (fig. 7). Lorsqu'un joueur demande à son adversaire : « est-ce que le personnage mystère (sommet en feu) a des lunettes ? », en fonction de la réponse, le joueur va par la suite s'intéresser ou non aux person-



Figure 7. Le jeu de société « Qui est-ce ? », où vous devez retrouver un personnage parmi plusieurs en interrogeant votre partenaire de jeu : « est-ce un garçon ? », « est-il blond ? », etc.

Qui est-ce? © 2010 Hasbro. Tous droits réservés.

nages à lunettes. La différence est que dans le cas des codes adaptatifs, les sommets interrogés sont les éléments du code, alors que dans le jeu du « Qui est-ce ? » les lunettes ne sont pas un personnage.

UN PROBLÈME TRÈS LOIN D'ÊTRE RÉSOLU

Ce sujet de recherche mathématique est très récent, puisqu'il ne date que de 1998. Les codes identifiants ou adaptatifs ont été introduits pour modéliser la détection de défaillance de processeurs dans les réseaux informatiques. L'importance de l'optimalité du code est évidente dans ce cas précis : on veut retrouver le processeur défectueux le plus rapidement possible et en « interrogeant » le minimum de processeurs.

Les quelques résultats présentés ici concernent des grilles simples, mais il ne faut pas oublier que le problème dans son ensemble s'intéresse aux graphes de manière générale qui peuvent être beaucoup plus complexes. Nous avons vu que même sur des graphes très simples, les démonstrations sont loin d'être évidentes. À l'heure actuelle, ce problème n'est d'ailleurs toujours pas entièrement résolu et de nombreux mathématiciens travaillent sur le sujet, notamment en France, dans des laboratoires de mathématiques à Bordeaux ou Grenoble. Les deux pages suivantes vous proposent l'interview d'une jeune chercheuse qui travaille sur ce sujet. **M. P.**

Pour en savoir plus

Pour les plus motivés, vous pouvez trouver à l'adresse suivante une thèse traitant du sujet et accessible en ligne :

<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00010293/en/>

Interview

Aline Parreau Jeune femme, blonde... et matheuse

Aline Parreau a 24 ans. Elle aime l'escalade, prend des cours de trapèze... et prépare une thèse en mathématiques (recherche opérationnelle et combinatoire). Preuve, s'il en est besoin, que l'on peut être sportive, faire du cirque... et aimer les maths !

PROPOS RECUEILLIS PAR **MARION PASTORI** POUR LA REVUE *DÉCOUVERTE*



© M. Pastori.

C'est en septembre 2009, après des études à l'ENS (École normale supérieure) de Lyon qu'Aline Parreau a intégré pour trois ans (durée classique d'une thèse) l'équipe Maths à modeler de l'Institut Fourier, le laboratoire de recherche en mathématiques de l'université Joseph-Fourier de Grenoble. Les recherches qu'elle mène avec son directeur de thèse portent sur les codes identifiants évoqués dans les pages précédentes.

Découverte. Comment en êtes-vous arrivée à étudier ce sujet ?

Aline Parreau. Mon directeur de thèse, Sylvain Gravier, avait construit un projet autour de ce thème de recherche avec des chercheurs de Bordeaux et des étudiants à lui, ici à Grenoble. Pendant mon stage de master 2, l'année dernière, j'ai été amenée à les rencontrer, et le sujet m'a intéressée ; donc on s'est mis d'accord pour travailler ensemble. Les codes identifiants sont un sujet assez facile à expliquer. C'est un problème plutôt intuitif, dont l'énoncé est facile à comprendre : on peut donc rapidement commencer à chercher. Et puis il s'agit d'un sujet récent : il reste pas mal de questions non élucidées, ce qui est particulièrement stimulant. On peut facilement en tirer de nombreuses variations, ce qui laisse un vaste champ de possibilités.

Découverte. Avez-vous une idée des résultats que vous allez trouver ?

A. P. Pour l'instant je commence, donc c'est assez vague. En ce moment, aidée par mon directeur de thèse, je cherche

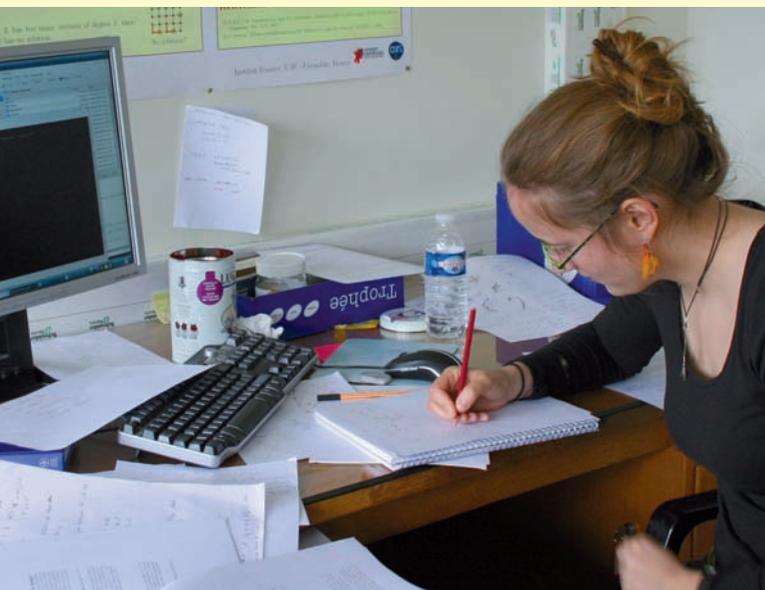
des graphes tels que le plus petit code identifiant soit constitué de tous les sommets sauf un. Ce sont des graphes très symétriques où il est très difficile d'identifier un sommet. Ce sont des structures très régulières qu'il faudra éviter à tout prix si l'on veut pouvoir identifier un sommet défectueux !

Découverte. Quelle est la journée type d'une doctorante en mathématiques ?

A. P. Je ne sais pas s'il y a une journée type parce que c'est très varié. Quand je suis au laboratoire par exemple, je travaille toute seule sur mes recherches, ou encore je passe du temps avec mon directeur de thèse pour discuter ou me réorienter sur des problèmes. Une part importante du travail consiste aussi à écrire nos résultats pour qu'ils soient publiés dans une revue spécialisée : c'est une façon de communiquer avec les autres chercheurs. Tout ça, c'est un peu le quotidien.

Mais il y a aussi beaucoup d'autres activités, comme par exemple les séminaires, où un petit groupe de chercheurs (du laboratoire, de Bordeaux ou d'ailleurs) se retrouve pour discuter des recherches de chacun. Il s'agit de présenter nos résultats, d'écouter des exposés ou de participer à des groupes de travail... L'ambiance est très sympa !

Les doctorants ont aussi des enseignements à donner quelques heures par semaine, le plus souvent pour des étudiants en première ou deuxième année à l'université. On suit aussi nous-mêmes



Papier, crayon, ordinateur : si peu de matériel pour la recherche en mathématiques... © M. Pastori.



Le directeur de thèse accompagne le doctorant dans ses recherches durant les trois années de sa thèse. © M. Pastori.

des formations pour se perfectionner en science, pour découvrir d'autres spécialités, pour enseigner ; on peut suivre des cours d'anglais...

Découverte. Qu'est-ce qui vous plaît dans la démarche de recherche en mathématiques ?

A. P. Ce qui est agréable c'est d'être la première à chercher sur un sujet et d'inventer de nouvelles choses. Moi, je le prends un peu comme un jeu. Ce qui est plaisant aussi, c'est d'être quasiment sûre qu'un résultat est vrai et d'arriver à le démontrer, de prouver que ce résultat est le bon.

Découverte. Comment décririez-vous le monde de la recherche en mathématiques pour ceux qui ne le connaissent pas ?

A. P. Déjà, beaucoup de gens ne s'imaginent pas qu'il y a encore de la recherche en maths, que tout n'a pas été trouvé. Je

pense qu'ils voient ce monde comme un milieu très fermé, très figé, où les personnes travaillent seules dans leur coin, ce qui est en grande partie faux. En réalité, les chercheurs en mathématiques voyagent beaucoup et travaillent avec des gens du monde entier. C'est un domaine où tout se construit grâce à des échanges. Et pour moi, travailler toute seule m'est quasiment impossible.

Découverte. Et le métier de chercheur ?

A. P. C'est un métier très intéressant car il laisse pas mal de libertés. Il y a des contraintes, bien sûr : il faut écrire des articles, assurer des responsabilités administratives, etc. Mais cela reste quand même un métier où l'on a beaucoup de libertés sur les sujets que l'on veut traiter. Continuellement, j'apprends de nouvelles choses et je trouve très agréable de savoir que rien n'est déterminé et que je pourrai toujours choisir.