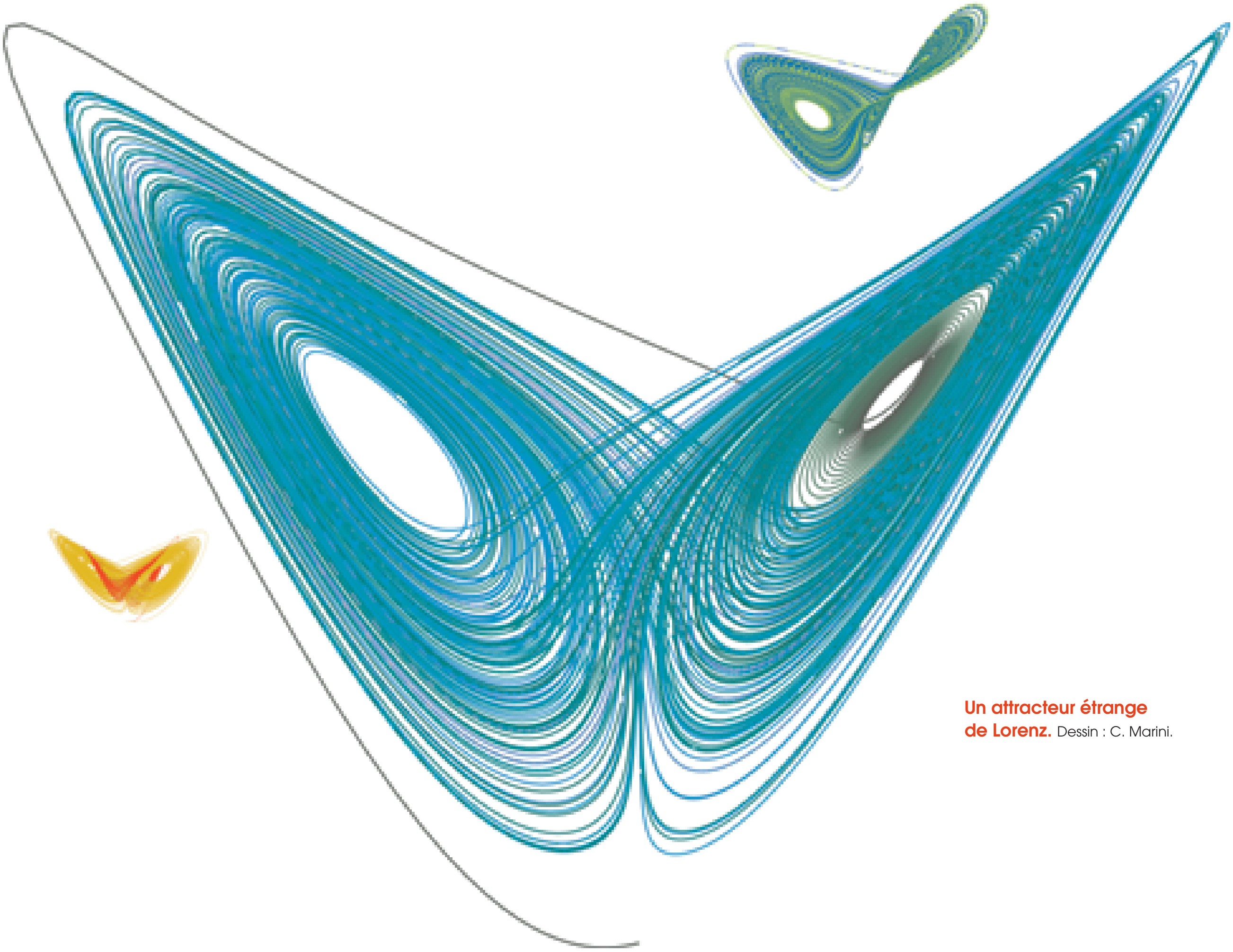


Un attracteur étrange de Lorenz. Dessin : C. Marini.

Un papillon peut-il prévoir la météo ?

Edward Norton Lorenz est l'un des fondateurs de la théorie du chaos. Auteur de la célèbre question « Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? », il démontre l'impossibilité théorique de prévoir la météo au-delà de quinze jours. Pourtant, si l'on ne peut pas prévoir le temps qu'il fera dans deux semaines, on peut paradoxalement savoir bien des choses sur le climat futur ! Comment un « papillon » peut-il nous permettre de le comprendre ?

PAR **CAMILLE MARINI**, MONITEUR AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

« – Zut, ce n'est pas de chance alors ! Je n'ai pas pris mon parapluie et il se met à pleuvoir des cordes !

– Ce n'est pas de chance maman, c'est certainement la faute d'un papillon brésilien !

– Mais qu'est-ce que tu me racontes là ?

– Ben voyons, si, comme le dit le grand météorologue Lorenz, le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut provoquer un ouragan au Texas, il peut tout aussi bien engendrer une averse à Paris !

– Tu as de la fièvre Maryam ? Que pourrait avoir à faire un papillon avec un ouragan ?

– C'est une image, chère maman. Ça veut dire qu'une petite modification dans l'atmosphère, comme le battement d'ailes d'un papillon, peut avoir de grandes conséquences, comme un ouragan. L'atmosphère est un système chaotique…
– Un quoi ? »

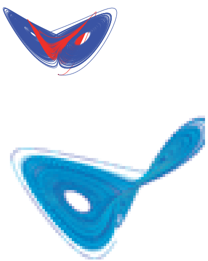
LES DÉBUTS DE LA THÉORIE DU CHAOS

Lorenz (1917-2008) (fig. 1) est un « pionnier » de la théorie du chaos. Bien avant lui, plusieurs mathématiciens et/ou physiciens tels que Leonhard Euler (1707-1783), Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Alexis Claude Clairaut (1713-1765), puis Henri Poincaré (1854-1912) avaient pressenti que certains phénomènes déterministes (c'est-à-dire qui ne dépendent pas du hasard) étaient *sensibles aux conditions initiales*. Cela signifie que si vous modifiez, même très légèrement, les conditions initiales du phénomène, il peut évoluer de manière radicalement différente. Par exemple, si vous jetez côte à côte deux feuilles dans l'eau d'une rivière un peu agitée, elles suivront rapidement des trajets très différents, même si elles étaient très proches à l'origine. Cette découverte de la sensibilité aux conditions initiales a été faite en tentant de prévoir les mouvements de la Lune, corps céleste soumis à l'attraction de la Terre et du Soleil (ce problème est connu sous le nom de *problème des trois corps*). Mais il manquait certainement à ces précurseurs un outil précieux pour accéder à la complexité de tels phénomènes : l'informatique, qui permettra de mener les calculs nécessaires dès les années 1960-1970…

UNE ATMOSPHÈRE IMPRÉVISIBLE ?

Depuis son enfance, Lorenz est passionné par les phénomènes météorologiques, ainsi que par les nombres. Après la Seconde Guerre mondiale, il devient météorologue au Massachusetts Institute of Technology (Boston, États-Unis) et tente de comprendre pourquoi les phénomènes atmosphériques sont si difficiles à prévoir. Cette difficulté est-elle due à l'absence d'un bon modèle ou de bons outils mathématiques, ou est-elle intrinsèque à ce problème ? L'évolution de l'atmosphère repose sur des équations, dites de Navier-Stokes[1], et issues de la mécanique des fluides. Ces dernières étant très compliquées à étudier, Lorenz se met en quête d'un modèle plus simple. Les mouvements atmosphériques sont en grande partie d'origine *convective*, c'est-à-dire dus à un transport de chaleur provoqué à la fois par la pesanteur et des différences de température. L'exemple le plus simple de convection est celui qui intervient dans une casserole d'eau sur le feu (fig. 2) : les particules d'eau au fond sont chauffées, deviennent alors moins denses et montent vers la surface. Mais les particules proches de la surface sont en contact avec l'air, moins chaud qu'elles. Elles sont donc refroidies et deviennent plus denses, ce qui les fait « plonger ». Lorenz simplifie les équations de la convection pour obtenir les « équations de Lorenz » qui modélisent la convection d'un fluide en deux dimensions chauffé par le bas (encadré *Les équations de Lorenz*). Il obtient ainsi un modèle beaucoup trop simple pour bien décrire l'évolution de l'atmosphère, mais aussi beaucoup plus facile à étudier.

Figure 1. Edward Norton Lorenz. © D. R.



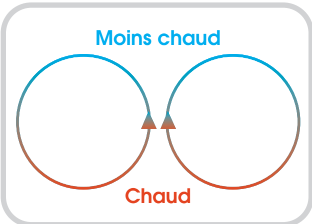


Figure 2. Schéma de la convection dans un fluide. Dessin : C. Marini.

DES ÉQUATIONS… AU PAPILLON

Ces trois équations à trois inconnues et trois paramètres (connus) sont vraiment très simples de prime abord, mais présentent pourtant déjà un comportement bien complexe. Nous allons voir qu'elles décrivent un système chaotique… *A priori*, à partir des équations décrivant le système physique étudié par Lorenz et en

(1) Claude Navier (1785-1836) et George Stokes (1819-1903) sont les deux physiciens qui ont donné leur nom aux fameuses équations décrivant le mouvement des fluides dans un milieu continu.

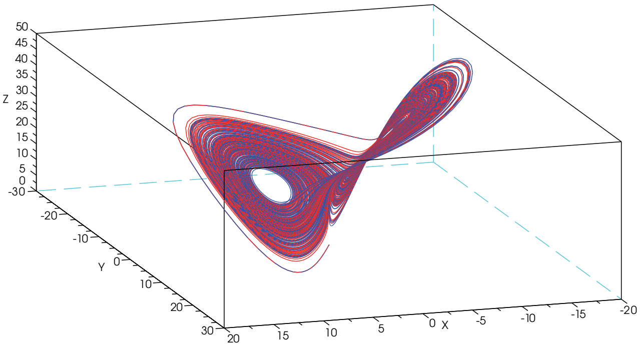


Figure 3. **Deux attracteurs étranges de Lorenz aux conditions initiales très proches. Le « papillon » bleu reprend l'attracteur de la figure d'entrée. Le « papillon » rouge est le résultat obtenu en modifiant légèrement z_0.** Dessin : C. Marini.

connaissant l'état initial du système (température, pression…), on devrait pouvoir obtenir son état à n'importe quel moment ultérieur. Malheureusement, il est impossible de résoudre ces équations : il n'existe pas de solution exacte qui permette de déterminer facilement l'état du système à n'importe quel instant. En revanche, on peut construire pas à pas, à l'aide d'un ordinateur, une solution numérique qui s'en approche (encadré *Système dynamique et intégrabilité*).

Fixons les valeurs des paramètres intervenant dans les équations de Lorenz ($\sigma = 10$, $R = 28$ et $b = 8/3$). Ensuite, nous affectons aux variables x, y et z, qui représentent l'état du système à un moment donné, les valeurs initiales $x_0 = y_0 = z_0 = 0{,}001$. Puis, à partir de ces valeurs et en utilisant les équations de Lorenz, nous calculons une approximation numérique des valeurs x_1, y_1 et z_1 prises par le système au bout d'un temps t donné. Et ainsi de suite pour les valeurs prises par le système au bout de deux fois le temps t donné, puis trois, etc. Il est ainsi possible de calculer, point par point, l'état du système à intervalles de temps réguliers. Pour cette condition initiale et pour ces valeurs des paramètres, nous constatons que le système ne se stabilise pas en un point, mais évolue indéfiniment pour donner une forme de papillon (figure page d'entrée) ! Ne vous y trompez pas : ce dessin n'est pas un trait continu (puisqu'il n'est pas possible d'expliciter la solution des équations), mais bien une suite de points qui, au fur et à mesure, dessine une image dans l'espace qui n'est ni une courbe, ni une surface, mais pas non plus un simple nuage de points. C'est ce que l'on appelle un *attracteur étrange*.

UN PAPILLON SENSIBLE AUX CONDITIONS INITIALES ?

Une propriété très importante de cette suite de points, et qui fait que ce système est chaotique, est qu'elle dépend fortement des conditions initiales. Si vous modifiez, ne serait-ce qu'un tout petit peu, la position initiale du système, il va évoluer différemment et les points de l'attracteur étrange ne vont pas apparaître dans le même ordre. Mais, et c'est là une propriété essentielle, l'allure générale de l'attracteur restera pourtant la même ! Autrement dit, si les points successifs ne se placent pas au même endroit au même moment, ils finiront quand même par dessiner le même papillon. Pour nous en convaincre, modifions légèrement l'une des conditions initiales du système ($z_0 = 0{,}001\,000\,1$ au lieu de $z_0 = 0{,}001$) tout en conservant les autres conditions initiales et en gardant les mêmes paramètres. Sur la figure 3, nous avons superposé les deux solutions correspondant à ces deux conditions initiales très proches, mais non identiques. Vous remarquez que l'allure générale du papillon reste

Les équations de Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

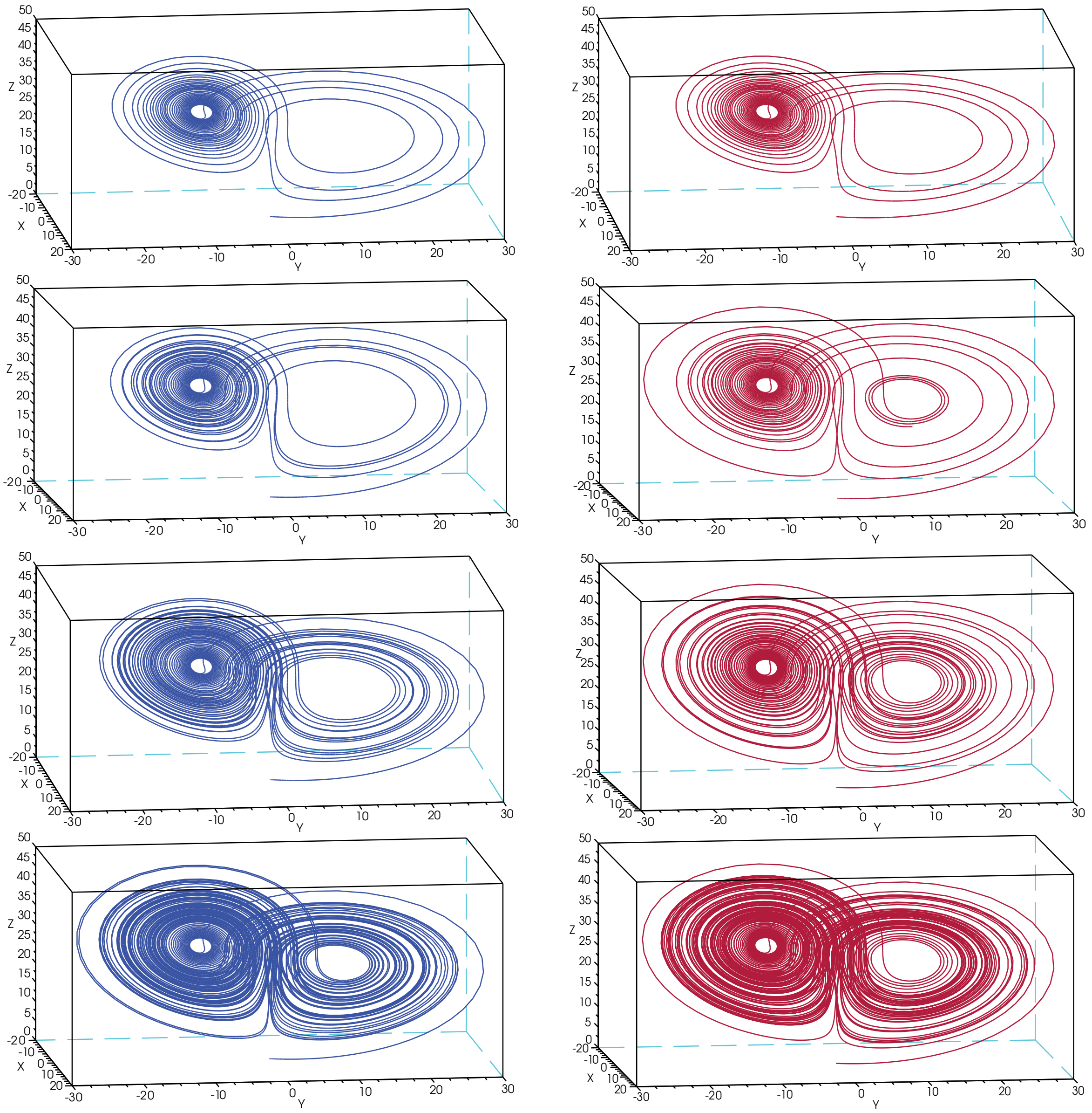
$$\frac{dy}{dt} = Rx - y - xy$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy$$

Le but de ces équations est de modéliser les phénomènes de convection d'un fluide idéal à deux dimensions, dans un réservoir chauffé par le bas (fig. 2). Attention, x, y et z ne sont pas des coordonnées spatiales du fluide (c'est un fluide en deux dimensions et non en trois) : en fait, c'est un peu plus compliqué que ça… Il nous suffira de retenir que x, y et z mesurent l'état du fluide et les mouvements à l'intérieur de celui-ci. σ, R et b sont des paramètres du système ; ce sont donc des données du problème. Sans entrer dans les détails, ils caractérisent la géométrie du réservoir, ainsi que le type de transfert de chaleur dominant dans le fluide. Notamment, si R est inférieur à un certain seuil, le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction (sans déplacement de matière) et si R est supérieur à ce seuil, il y a convection et donc transfert de chaleur par déplacement de matière. C'est le cas qui nous intéresse. Notons que les équations de Lorenz présentent un caractère chaotique non pas pour n'importe quelles valeurs des paramètres, mais seulement pour certaines combinaisons.

la même. Toutefois, les deux papillons n'ont pas été obtenus suivant la même évolution, comme vous pouvez l'observer sur la figure 4 où les solutions ont été tracées depuis le temps initial jusqu'à des pas de temps de plus en plus grands. Vous constatez qu'au départ les deux solutions suivent des évolutions identiques (fig. 4), puis elles progressent différemment pour finalement donner des résultats très proches. Cela peut aussi s'observer en traçant l'évolution d'une seule des trois coordonnées en fonction du temps (fig. 5). Au départ les courbes sont identiques mais, assez rapidement, elles empruntent des trajectoires complètement différentes. Nous venons de voir que l'allure de l'attracteur étrange ne dépend pas des conditions initiales : en modifiant ces dernières, vous obtenez toujours la même forme de papillon. En

Figure 4. Comparaison de l'évolution des deux attracteurs étranges. Les solutions sont tracées au pas de temps 2 500 (première ligne), 3 000 (deuxième ligne), 5 000 (troisième ligne) et 10 000 (quatrième ligne). Dessin : C. Marini.



Système dynamique et intégrabilité

On appelle système dynamique la modélisation d'un phénomène par des équations différentielles qui décrivent l'évolution de ce phénomène dans le temps. Par exemple, si on note x le nombre de lapins dans un jardin, la variation de lapins en fonction du temps est donnée par la dérivée de x par rapport au temps, notée dx/dt. Nous pouvons supposer que cette variation du nombre de lapins ne dépend que du nombre de lapins déjà présents. Autrement dit, qu'il n'y a, notamment, aucun facteur limitant à l'augmentation de la population : le jardin est donc de taille infinie et possède une infinité de carottes pour nourrir tous les lapins. Dans ce cadre, nous pouvons écrire : $dx/dt = ax(t)$ avec a un certain paramètre positif. Dans cet exemple, nous pouvons explicitement calculer une solution du système (pour les « initiés » on obtient $x(t) = x_0 \exp(at)$ où x_0 est le nombre de lapins présents au départ). On dit, dans ce cas, que le système est intégrable : nous pouvons donner une équation précise de sa solution et l'utiliser pour calculer la valeur qu'elle prend à tout instant t. Mais un système dynamique peut aussi ne pas avoir de solution, ou en avoir une sans que cette dernière puisse être clairement explicitée. Il faut alors calculer « numériquement » une solution. Pour ce faire, nous discrétisons le système, c'est-à-dire que nous ne considérons le système qu'à certains temps t_0, t_1, t_2… et que nous calculons la valeur de x au temps t_i en fonction de sa valeur au temps t_{i-1}. Si vous connaissez x au temps zéro (c'est-à-dire les conditions initiales du système), vous pouvez alors calculer x au temps 1 ; puis connaissant x au temps 1, vous pouvez calculer x au temps 2, etc. Vous pouvez alors obtenir une succession infinie et discontinue de valeurs prises par la solution du système.

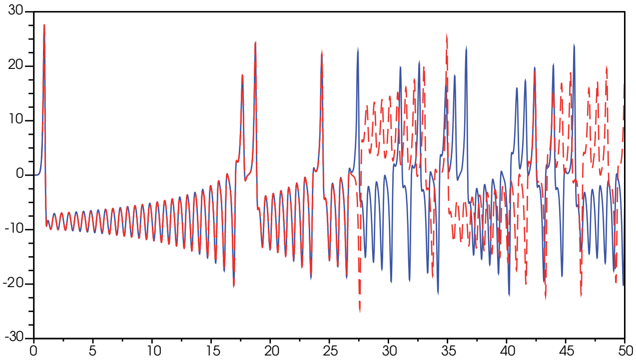


Figure 5. **Évolution de la coordonnée y du système de Lorenz en fonction du temps, pour les deux attracteurs étranges de la figure 4.** Dessin : C. Marini.

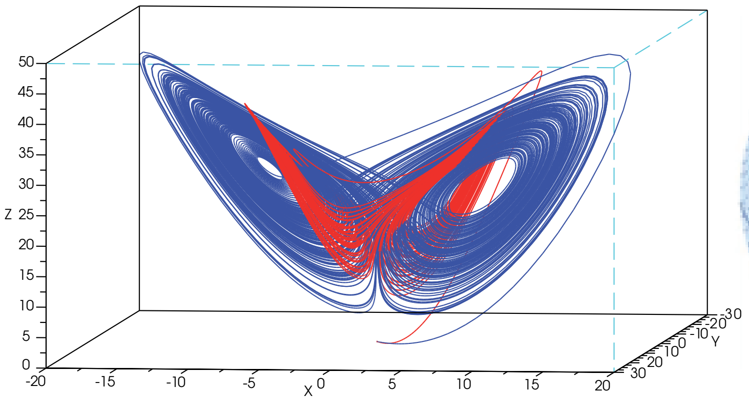
revanche, quand vous modifiez les paramètres dans le système d'équations de Lorenz, cette allure générale peut être bouleversée. La figure 6 montre deux solutions obtenues pour des valeurs différentes de ces paramètres.

DU SYSTÈME DE LORENZ AUX PRÉVISIONS MÉTÉOROLOGIQUES

Les équations de Lorenz sont beaucoup trop simples pour représenter parfaitement l'évolution des phénomènes atmosphériques et, pourtant, le système qu'elles décrivent est déjà chaotique ! Et les propriétés mathématiques de l'attracteur étrange de Lorenz que nous venons de présenter ont une traduction directe en termes de phénomènes météorologiques et climatiques. Prévoir la météo, c'est savoir quel sera l'état de l'atmosphère dans un instant futur, sachant le temps qu'il fait dans l'instant présent, comme par exemple prévoir s'il va pleuvoir le lendemain à Thonon-les-Bains et quelle sera la température de l'air. Cela revient à savoir sur quel point du papillon nous nous situerons dans un instant futur précis, étant donné certaines conditions initiales (le temps qu'il fait aujourd'hui). Pour prévoir le temps, Météo France utilise des modèles de la dynamique de l'atmosphère, c'est-à-dire les lois de la conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement (équations de Navier-Stokes). Concrètement, ce sont des programmes informatiques qui simulent cette dynamique. Plus précisément, l'atmosphère est analysée suivant un certain maillage (fig. 7). En chaque point du maillage, sont calculées la température, la pression, la vitesse du vent, ainsi que d'autres variables caractérisant l'état de l'atmosphère. On donne comme conditions initiales à ces équations l'état actuel de l'atmosphère grâce à des mesures réalisées par des stations au sol, des radiosondages, des stations GPS ou bien encore des satellites. La donnée de ces conditions initiales est donc notamment soumise à la précision de ces mesures. Or, comme nous l'avons vu, la position des points du papillon est très sensible aux conditions initiales. Cela explique qu'il soit très difficile de prévoir l'état du système dans un instant futur un tant soit peu éloigné, et donc la météo. Pour un instant futur plus proche, cela pose moins de problèmes : nous voyons sur les figures 4 et 5 qu'au départ l'évolution des deux papillons est quasi identique, avant de se différencier considérablement.

CLIMAT ET MÉTÉO

Étudier le climat est tout autre chose. Le climat se définit par la moyenne de l'état de l'atmosphère (et de l'océan) sur une période de temps assez longue. La valeur clas-



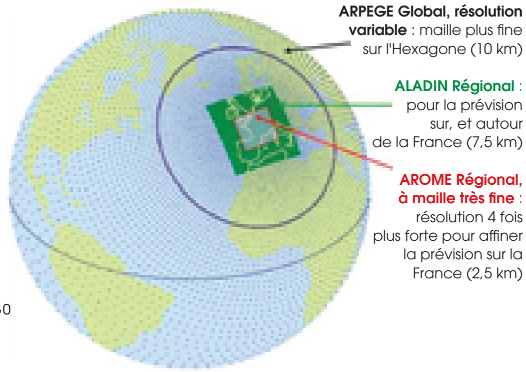


Figure 6. Deux attracteurs étranges de Lorenz calculés avec les paramètres s = 10, R = 28 et b = 8/3 pour le papillon bleu et s = 3, R = 26 et b = 1 pour le papillon rouge (les conditions initiales étant les mêmes). Dessin : C. Marini.
Figure 7. La chaîne de prévision numérique de Météo France. © Météo France.

sique de cette période est trente ans, suivant l'Organisation météorologique mondiale. Elle peut toutefois varier suivant les phénomènes observés. Elle sera par exemple plus courte pour l'étude des vents que pour l'étude de la température au fond de l'océan, ces derniers variant avec une échelle de temps beaucoup plus lente. Étudier le climat revient donc à analyser les statistiques de l'état du système terrestre sur une longue période de temps, comme par exemple calculer la température moyenne à Brest en janvier. Pour faire l'analogie avec le papillon de Lorenz, cela revient à étudier quelle est la forme générale du papillon. Ce qui ne dépend pas des conditions initiales. En revanche, nous avons vu que cette forme varie quand on change les paramètres des équations de Lorenz ; dans le cas du système climatique, ces paramètres sont ce que l'on appelle les *forçages climatiques*, tels que la quantité de CO_2 présente dans l'atmosphère ou bien encore le rayonnement solaire.

Afin de comprendre le climat, les chercheurs ont recours à des observations (de température, de pression, d'humidité, etc.) d'origine diverses : données satellites, mesures obtenues par des sondes envoyées dans l'océan ou dans l'atmosphère, carottes de glace… Ces observations, assez nombreuses depuis les années 1960 grâce à l'utilisation des satellites, sont un peu plus limitées avant cette date. Pour compenser ce manque d'observations, mais aussi pour prévoir le climat, les spécialistes utilisent des modèles. Comme pour les modèles de prévision météorologique, ce sont des programmes informatiques qui simulent l'évolution de l'atmosphère, mais aussi de l'océan. Le modèle est initialisé avec un certain état de l'océan et de l'atmosphère, et calcule l'évolution de ce système soumis à un certain forçage extérieur (concentration en CO_2, rayonnement solaire) sur une assez longue période de temps. Ce modèle n'est pas conçu pour prévoir le temps qu'il va faire le 24 avril 2084 à Vienne, mais pour réaliser des statistiques (ce qui revient à étudier la forme du papillon) à partir de données, comme par exemple la tendance des températures en France dans les années 2060-2070. Un autre exemple consiste à calculer la fréquence d'apparition du courant El Niño au large du Pérou, dont on ne peut pourtant prévoir s'il sera là ou non en l'an 2222.

Bref, si vous ne pouvez pas prévoir le temps qu'il fera un jour donné dans un lieu précis, vous pouvez toutefois, grâce aux statistiques, obtenir une représentation du climat futur. Ce que Lorenz, dans de sa conférence intitulée « Prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? » donnée lors de la réunion de l'American Association for the Advancement of Science en 1972, résume par : « J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent. » **C. M.**

Pour en savoir plus

Sur les modèles de climat :
http://www.ipsl.fr/fr/Mediatheque/Multimedia/Animation-sur-la-modelisation-climatique

Sur le climat :
http://blogs.tv5.org/climats/ et http://iceblog.over-blog.com/

Sur le « moulin à eau chaotique de Lorenz » :
http://images.math.cnrs.fr/Le-moulin-a-eau-de-Lorenz.html