R. Kaupp / Creative Commons.

Formes mathématiques

Le problème du charpentier

Le « problème du charpentier » consiste à découper le plus grand rectangle possible dans un triangle donné. Une méthode de construction a d'abord été donnée par le mathématicien français Jacques Ozanam dans un livre de 1694, mais sans démonstration de son optimalité. Deux siècles plus tard, un mathématicien offre une autre méthode de construction qui justifie, du même coup, la solution de son prédécesseur.

PAR **MARION PASTORI**, MÉDIATRICE SCIENTIFIQUE DE LA FÉDÉRATION DE RECHERCHE MATHS À MODELER DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

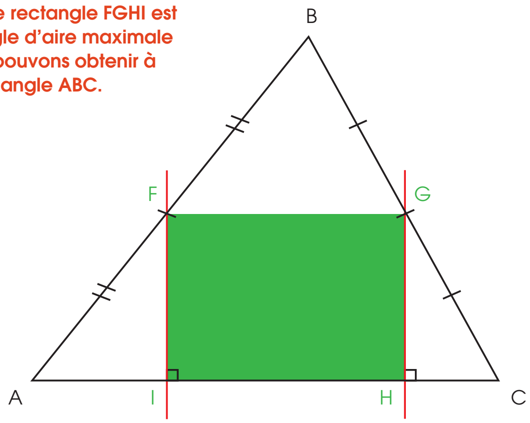
« Un charpentier a une pièce de bois triangulaire et, voulant en tirer le meilleur parti possible, il cherche le moyen d'y couper la plus grande table quadrangulaire rectangle qu'il se puisse. Comment doit-il s'y prendre ? » Voilà l'une des questions que se pose un mathématicien français, Jacques Ozanam (1640-1717), dans le tome I de ses fameuses *Récréations mathématiques et physiques* (problème 69, chapitre I, p. 399). Si vous étiez passé à côté, il y a plus de deux cents ans, voici la réponse…
Notre problème peut se résumer ainsi : comment extraire un rectangle d'aire maximale à l'intérieur d'un triangle quelconque ? Nous admettrons que tous les sommets du rectangle se trouvent sur les côtés du triangle. Et nous ajouterons une autre question, fondamentale en mathématiques : comment démontrer l'optimalité du résultat ou, plus simplement, comment être certain que l'on ne pourrait pas faire mieux ? Concernant la première question, Jacques Ozanam répondit que, pour obtenir le rectangle le plus grand possible, ce dernier devait avoir une aire égale à la moitié de l'aire du triangle. Il présenta ainsi une méthode de construction optimale que nous allons vous faire découvrir.

LA SOLUTION DE JACQUES OZANAM

Trois cas se présentent : soit le triangle n'a que des angles aigus (mesurant entre 0° et 90°), soit il est rectangle, soit il possède deux angles aigus et un angle obtus (mesurant entre 90° et 180°). Prenons un triangle ABC quelconque qui ne présente que des angles aigus : c'est le premier cas (fig. 1). Nous choisissons arbitrairement deux côtés de ce triangle, par exemple [AB] et [BC], et nous prenons les milieux de ces deux côtés, que nous appelons respectivement F et G. Nous traçons ensuite la droite passant par F et perpendiculaire à (AC). Elle coupe (AC) en I. Traçons ensuite la droite passant par G et perpendiculaire à (AC). Elle coupe (AC) en H. Nous obtenons le quadrilatère FGHI. Jacques Ozanam affirme qu'il s'agit d'un rectangle, que l'aire de ce rectangle est la moitié de celle du triangle et qu'elle est maximale. Il passe ensuite à un autre problème : découper la plus grande ellipse possible dans un triangle donné…
Expliquons la raison pour laquelle ce quadrilatère est bien un rectangle. Par construction, FGHI possède deux angles droits, en H et I. Mais cela ne suffit pas à faire de lui un rectangle, comme le montre la figure 2. Vous souvenez-vous du « théorème de la droite des milieux », cas particulier du fameux théorème de Thalès (vers 625 av. J.-C.-547 av. J.-C.) ? En tout cas, il devait apparemment faire partie des « connaissances légères » exigées pour les lecteurs des *Récréations mathématiques et physiques* ! Il nous dit que F et G étant les milieux de [AB] et [BC], la droite (FG) est parallèle à la droite (AC). Puisque les droites (FI) et (GH) sont perpendiculaires à (AC), elles le sont donc également à (FG). Le quadrilatère FGHI possède donc quatre angles droits… ce qui fait bien de lui un rectangle ! Le théorème de la droite des milieux nous dit aussi que la longueur FG est la moitié de la longueur AC et même que l'aire du triangle BFG est le quart de celle de ABC. Mais, comme l'illustre la figure 3, l'aire du triangle BFG est aussi égale à la somme des aires des triangles FIA et GHC

→→→

Figure 1. Le rectangle FGHI est un rectangle d'aire maximale que nous pouvons obtenir à partir du triangle ABC.



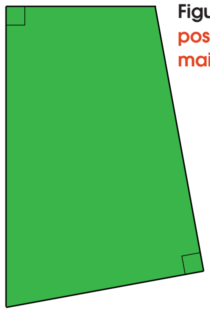


Figure 2. Ce quadrilatère possède deux angles droits, mais n'est pas un rectangle.

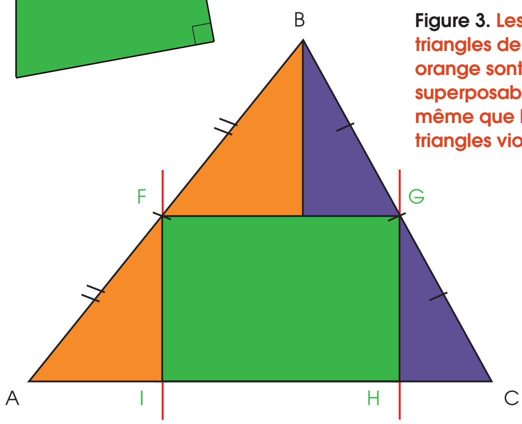


Figure 3. Les deux triangles de couleur orange sont superposables, de même que les deux triangles violets.

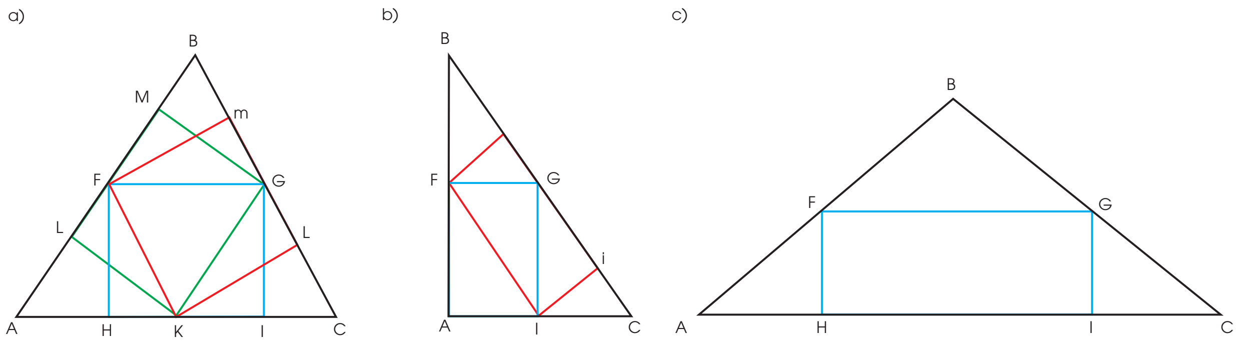


Figure 4. Le nombre de solutions change en fonction de la nature du triangle (avec trois angles aigus, rectangles ou obtus).

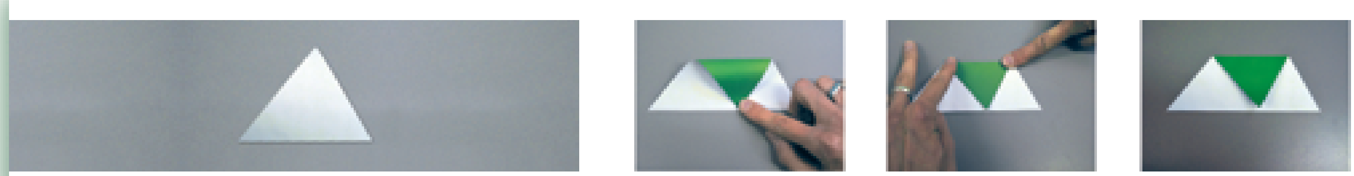


Figure 5. Pliage qui fournit un rectangle dont l'aire est la moitié de celle du triangle. © Palais de la découverte / C. Rousselin.

(il suffit de faire « glisser » les deux petits triangles dans le grand pour s'en convaincre). Finalement, l'aire du rectangle FGHI vaut donc bien la moitié de l'aire du triangle ABC. Mais est-elle pour autant maximale ? Rien ne permet de l'affirmer… Un peu de patience !

SOYONS UN PEU OBTUS

Dans le cas où le triangle possède trois angles aigus, trois rectangles différents peuvent être construits selon les deux côtés de départ que l'on a choisi. On peut ainsi favoriser une forme rectangulaire plus ou moins allongée, à choisir en fonction de la table à concevoir (fig. 4a).
Lorsque le triangle est rectangle, la méthode de construction est toujours la même, mais nous ne pouvons construire que deux rectangles différents et non plus trois. En effet, les deux rectangles obtenus en prenant le milieu de l'hypoténuse et de l'un des deux autres côtés coïncident (fig. 4b). Lorsque le triangle est obtus, c'est encore une fois la même construction mais, dans ce cas, il ne faut pas choisir les milieux de deux côtés au hasard. Il faut partir des deux côtés adjacents à l'angle obtus. Il n'y a plus alors qu'une seule construction de rectangle possible (fig. 4c).

AVEC CHARLES PAYAN, C'EST PLIÉ !

Dans tous les cas, construire un tel rectangle n'est finalement pas bien compliqué si l'on connaît la méthode. Les mathématiques deviennent plus intéressantes lorsque l'on veut prouver que ce rectangle sera bien le plus grand possible que l'on puisse obtenir. Deux siècles après la publication de la méthode de construction de Jacques Ozanam, le mathématicien grenoblois Charles Payan, relisant par hasard le problème du charpentier, en a donné une autre, très élégante, qui permet en plus de confirmer que la solution de Ozanam était bien la meilleure : il suffit de procéder à quelques pliages simples.
Étudions le cas du triangle possédant trois angles aigus (à vous de regarder les deux autres…). Rabattons les sommets de ce triangle vers l'intérieur comme le montre la figure 5. Nous choisissons un sommet et nous le rabattons sur son côté opposé suivant un pli parallèle à ce côté opposé. Puis nous rabattons les deux

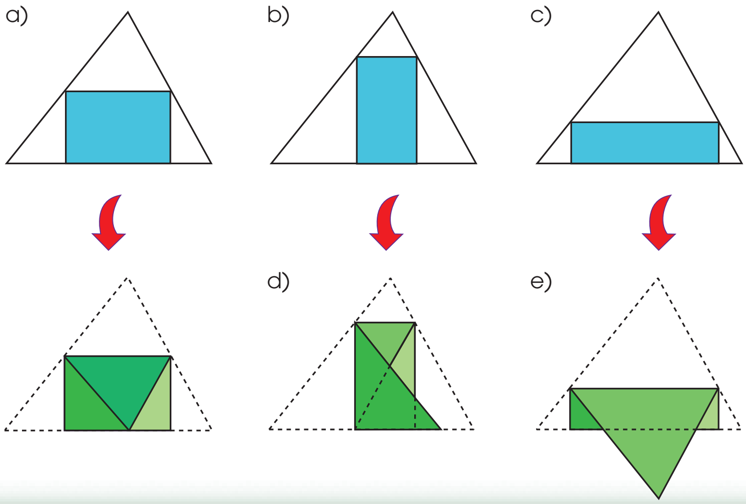
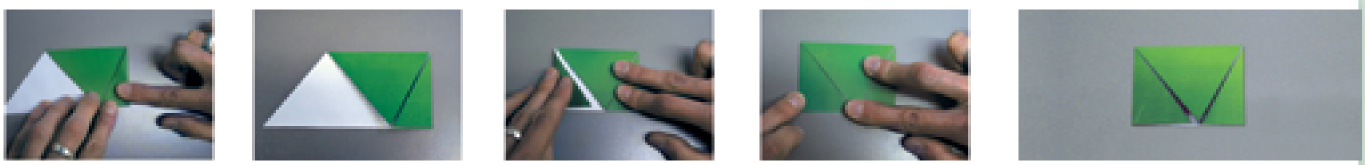


Figure 6. Rectangle obtenu par pliage (a) et deux autres formes de rectangle possibles (b) et (c). Résultat du pliage selon ces rectangles (c, d et e).



autres sommets vers l'intérieur, jusqu'au sommet déjà rabattu, en suivant deux plis perpendiculaires au premier. Nous obtenons trois triangles qui se complètent parfaitement pour former un rectangle dont l'aire est clairement la moitié de celle du triangle de départ.

TROP HAUTS, TROP LARGES... TROP PETITS

Si nous construisons un rectangle dont les sommets se trouvent sur les côtés du triangle, soit il correspond au rectangle que forment les marques du pliage que nous venons de réaliser (fig. 6a), soit il est plus haut et moins large (fig. 6b), soit il est moins haut et plus large (fig. 6c). Plions selon ces deux derniers types de rectangles, comme nous l'avons fait pour le premier. Nous obtenons les deux situations suivantes : si le rectangle est très haut mais peu large, les parties restantes à gauche et à droite du rectangle vont se chevaucher dans le rectangle en se repliant (fig. 6d), voire dépasser du bord du rectangle. Si le rectangle est moins haut mais très large, c'est la partie du haut restante qui va dépasser du bord du rectangle en se repliant (fig. 6e). Dans les deux cas, nous constatons que l'aire du rectangle est plus petite que la somme des aires des trois parties restantes, puisque ce rectangle n'arrive pas à les contenir sans qu'elles se chevauchent. L'aire de ce rectangle est donc nécessairement inférieure à la moitié de l'aire du triangle. De plus, on pourrait démontrer qu'il ne peut y avoir une autre catégorie de pliage que les trois présentés : celui qui tombe exactement (fig. 6a), celui qui se chevauche (fig. 6b) et celui qui dépasse (fig. 6c).
Autrement dit, il n'est pas possible d'obtenir un rectangle dont l'aire soit plus grande que le rectangle que nous avons obtenu grâce au premier pliage. Le rectangle le plus grand possible que nous pouvons construire est donc bien un rectangle dont l'aire est exactement égale à la moitié de l'aire du triangle de départ. Et nous sommes certains désormais que nous ne pourrions faire mieux. **M. P.**

Pour en savoir plus

Pour les curieux, retrouvez l'intégralité des *Récréations mathématiques et physiques* de Jacques Ozanam numérisées sur Gallica :
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k927336.r=jacques+ozanam.langFR