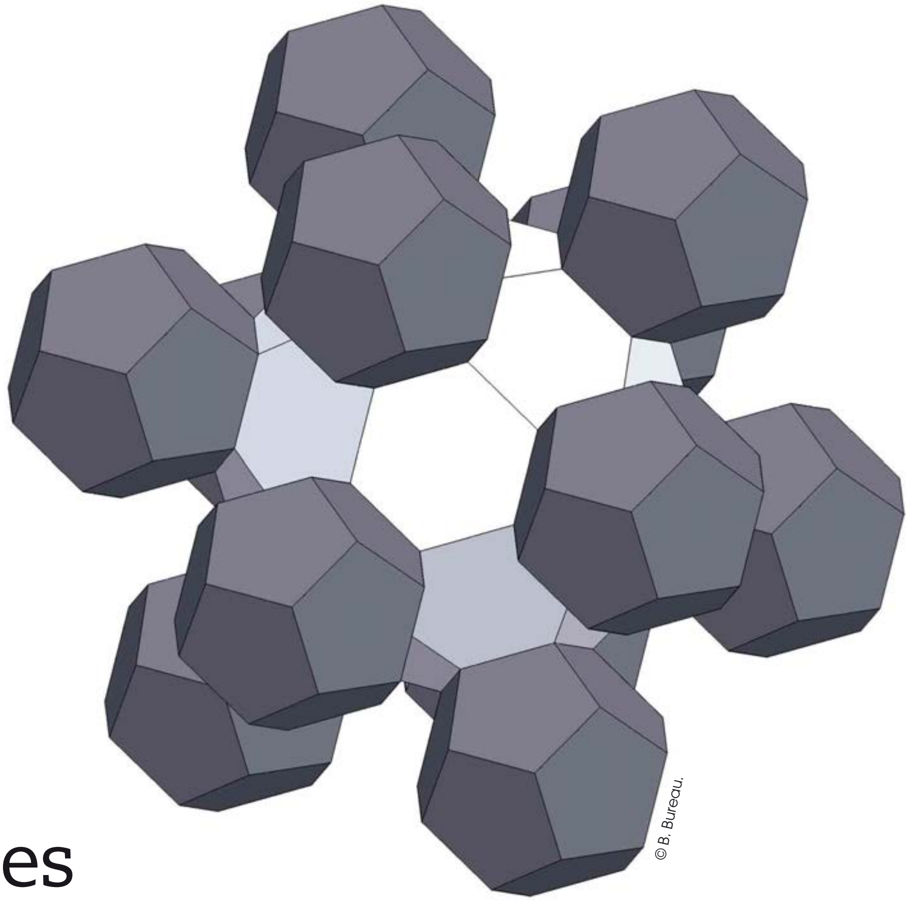


© B. Bureau.

Formes mathématiques

Un drôle de ballon de football

Même si vous n'aimez pas le foot, vous en connaissez au moins le ballon ! À vrai dire un objet plutôt familier : une sphère de cuir ou de tout autre matière homologuée par la Fédération internationale de football association. Sa circonférence doit être comprise entre 68 et 70 centimètres et son poids entre 410 et 450 grammes, au début du match. Simple ? Gageons qu'au terme de cet article, vous ne regarderez plus un ballon de foot de la même façon !

PAR **PIERRE AUDIN**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Le ballon de football traditionnel est constitué d'hexagones réguliers, le plus souvent blancs, et de pentagones réguliers, le plus souvent noirs (fig. 1). Si la construction d'un hexagone régulier à partir d'une rosace est bien connue (fig. 2), les façons de construire un pentagone régulier sont moins populaires. Alors pourquoi ne pas se contenter des hexagones et se compliquer la vie avec ces pentagones ? Tout simplement parce qu'on ne peut pas faire autrement !

L'explication nous vient de Leonhard Euler (1707-1783) et de sa célèbre relation : si on découpe une boule en polygones collés selon leurs arêtes (on obtient alors un « polyèdre »), alors le nombre de

Figure 1. Deux modélisations d'un ballon de foot, avec des faces planes (ci-dessus) ou des faces « bombées » (ci-contre).
© Palais de la découverte / B. Bureau.

Figure 2. Construction d'une rosace et d'un hexagone régulier à partir de 7 cercles de même rayon. © Palais de la découverte / G. Reuiller.

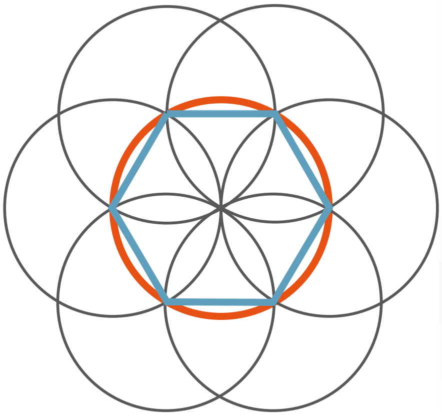


Figure 3. En essayant de faire un volume fermé avec des hexagones, on obtient une surface trouée de pentagones. © Palais de la découverte / B. Bureau.

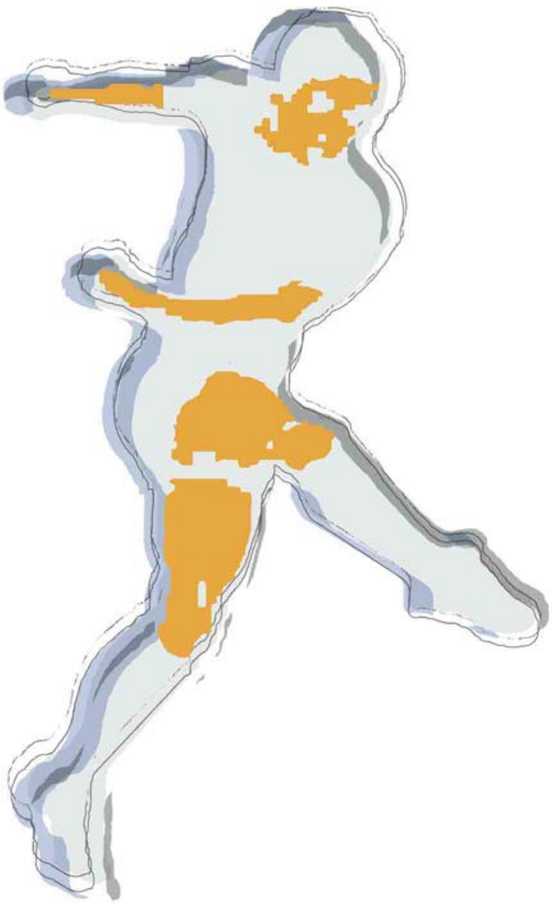
faces (F), le nombre d'arêtes (A) et le nombre de sommets (S) vérifient : $S - A + F = 2$.
Faisons simple : les pièces utilisées pour faire notre ballon sont cousues sur un côté commun et sont gentiment disposées à trois autour d'un sommet commun. Peut-on se contenter de pièces hexagonales pour fabriquer un tel polyèdre ?
Chaque face serait alors entourée de 6 arêtes. Il y aurait donc 6 fois plus d'arêtes que de faces ? Non, car ainsi chaque arête est comptée deux fois puisqu'elle appartient à deux faces : il n'y a donc que 3 fois plus d'arêtes que de faces, soit $A = 3F$. Chaque face ayant 6 sommets, il y aurait 6 fois plus de sommets que de faces ? Que nenni ! Chaque sommet étant compté trois fois, puisqu'il appartient à trois faces, il y a 2 fois plus de sommets que de faces, soit $S = 2F$. Mais alors on aurait $S - A + F = 2F - 3F + F = 0$ ce qui contredit la relation d'Euler. Notre ballon de foot doit donc contenir d'autres faces que des hexagones, mais quelle forme leur donner ?

ESSAYONS QUAND MÊME !

Pour le savoir, essayons malgré tout de fabriquer un polyèdre fermé en collant sur leurs côtés des hexagones réguliers identiques (fig. 3). Comme on pouvait s'y attendre, cela ne marche pas ! Il reste des espaces vides entre les hexagones, qui ont la forme… de pentagones.

Il est donc naturel, pour compléter notre ballon de foot, d'ajouter aux hexagones réguliers des pentagones réguliers. Combien nous en faut-il ? Supposons qu'il y ait des faces hexagonales, au nombre de H, et des faces pentagonales, au nombre de P, de sorte que F = H + P. La relation d'Euler S – A + F = 2 s'écrit désormais S – A + (H + P) = 2.

Exprimons A et S en fonction de H et P. Chaque face hexagonale apporte 6 arêtes, soit 6H en tout, et chaque face pentagonale en apporte 5, soit 5P en tout. Comme précédemment, chaque arête est comptée deux fois, donc nous avons : 6H + 5P = 2A. De même, les H faces hexagonales apportent 6H sommets et les P faces pentagonales en apportent 5P. S'il y a toujours trois faces par sommet, chaque sommet appartient à trois faces et l'on a la relation : 6H + 5P = 3S.



Pour éviter les fractions, multiplions par 6 les deux membres de la formule d'Euler précédente. Nous obtenons : 6S – 6A + 6H + 6P = 12, ou 2 x (3S) – 3 x (2A) + 6H + 6P = 12. En remplaçant 2A et 3S par 6H + 5P, nous obtenons : 2(6H + 5P) – 3(6H + 5P) + 6H + 6P = 12. Ce qui, en simplifiant, donne : 12H + 10P – 18H – 15P + 6H + 6P = 12, c'est-à-dire que P = 12.

RÉSUMONS-NOUS

S'il y a 12 pentagones sur un ballon de foot, c'est parce que l'on s'impose d'avoir 3 faces à chaque sommet. En revanche, H ayant disparu dans le calcul précédent, la relation d'Euler ne nous donne, dans ce cas, aucune contrainte sur la valeur de H ! Le nombre d'hexagones pourrait, par exemple, être nul : nous aurions alors un dodécaèdre, polyèdre fait de 12 faces pentagonales (fig. 4). En général, les ballons de foot sont constitués, eux, de 20 hexagones en plus des 12 pentagones (fig. 5).

PEUT-ON AVOIR PLUS DE 12 PENTAGONES ?

Et si nous autorisions plus de 3 faces par sommet ? Pourquoi pas 4, ou 5 ou plus ? Dans les calculs précédents, nous changeons alors 6H + 5P = 3S en 6H + 5P ≥ 3S : les sommets produits par les faces hexagonales

Figure 4. Un dodécaèdre, polyèdre constitué de 12 faces pentagonales.
© Palais de la découverte / B. Bureau.

et pentagonales appartiennent chacun à 3 faces, ou à 4 faces, ou à 5 faces ou… Chacun appartient à au moins 3 faces.

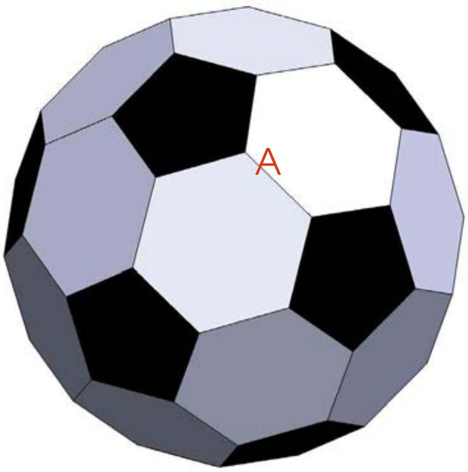
Si nous reprenons le calcul précédent, nous n'obtenons plus P = 12, mais P ≥ 12. Ce qui veut dire que l'on pourrait avoir des « ballons » avec plus de 12 pentagones si on ne s'impose plus d'avoir 3 faces par sommet ? Oui. Il suffit pour cela, par exemple, de coller un dodécaèdre sur un des pentagones du ballon de foot, et de supprimer le pentagone commun (pour avoir un seul et même volume). Le ballon de foot porte alors des « bourgeons dodécaédriques ». Chaque pentagone du ballon de foot peut alors être remplacé par 11 autres suivant ce modèle (fig. 6), ce qui en fait à chaque fois 10 de plus. À partir du ballon de foot « classique » à 12 pentagones et 20 hexagones, nous pouvons ainsi obtenir un ballon de foot avec 22, 32, 42, … pentagones.

Autour du point A, par exemple, le ballon de foot avait une face pentagonale et deux faces hexagonales (fig. 5). Désormais, en plus des deux faces hexagonales, on trouve en A deux faces pentagonales (fig. 6) : ABCDE et AEFGH. Donc en A il y a 4 faces et non plus 3. Par ailleurs, si nous recommençons à partager ABCDE en 11 pentagones (ce qui impose de modifier la taille et la forme des faces pentagonales utilisées, et les angles qui les séparent), alors C, D et E vont être entourés chacun de quatre faces mais A et B en auront désormais 5 autour d'eux. Amusant, non ?

ÉPILOGUE

Voilà qui ouvre des perspectives pour fabriquer des ballons de plus en plus bizarres, en remplaçant tous les pentagones qui les composent par des bourgeons dodécaédriques. D'ailleurs, le bourgeon n'est pas forcément un dodécaèdre : pourquoi ne pas coller deux ballons de foot suivant deux faces identiques en supprimant cette face commune ? Le nombre de pentagones changera, le nombre d'hexagones aussi. Ainsi, si le bourgeon apparaît sur un hexagone, le nombre de pentagones du polyèdre qui en résulte est la somme des nombres de pentagones de chacun des deux ballons recollés.

Il est donc possible de créer aussi des ballons de foot avec 24, 36, 48 … pentagones. Quel dommage de continuer à taper frénétiquement dans un ballon de foot, alors qu'il reste tant à faire à son sujet : explorer tous les ballons possibles selon leurs nombres d'hexagones et de pentagones. **P. A.**



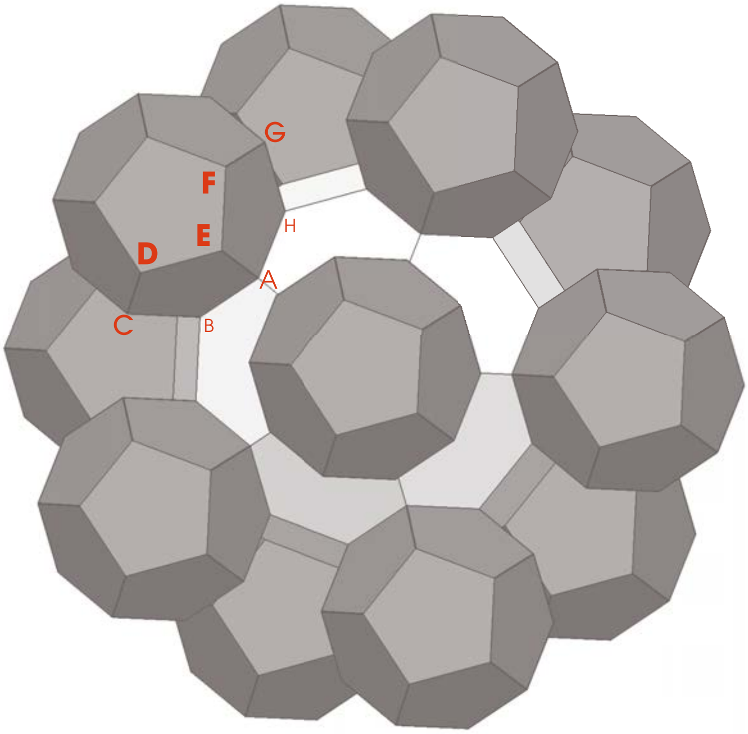


Figure 5. Version « polyédrique » du ballon de foot. © Palais de la découverte / B. Bureau.

Figure 6. Polyèdre de la figure 5 sur lequel chaque face pentagonale a été remplacée par 11 pentagones. Il possède toujours seulement 20 hexagones, mais 12 x 11 = 132 pentagones.
© Palais de la découverte / B. Bureau.