

# Formes mathématiques

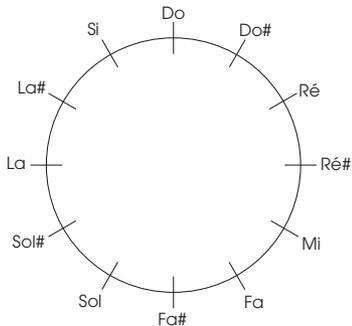
## Géométrie musicale

*A priori*, on voit mal ce que ces deux mots peuvent faire ensemble. Pourtant, la géométrie musicale constitue aujourd'hui un domaine de recherche à part entière pour passionnés de musique et de mathématiques à la fois. Certains y verront peut-être de pures spéculations intellectuelles gratuites, et pourtant... Pour comprendre comment la musique est faite, et éventuellement proposer de nouvelles façons d'aborder la composition, cette approche est riche de promesses.

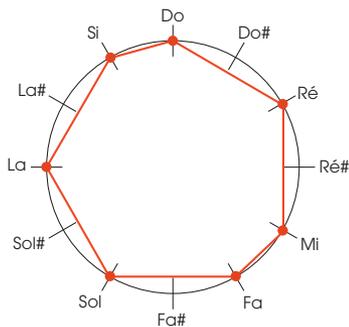
PAR **ROBIN JAMET**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

**D**ans la musique occidentale, classique ou populaire, il est d'usage de se servir de douze notes. Au XX<sup>e</sup> siècle, certains compositeurs ont commencé à en utiliser plus. Ailleurs dans le monde, il arrive que l'on en utilise plus, ou moins, ou d'autres... Pourquoi douze ? Pourquoi ces douze-là ? Nous n'en parlerons

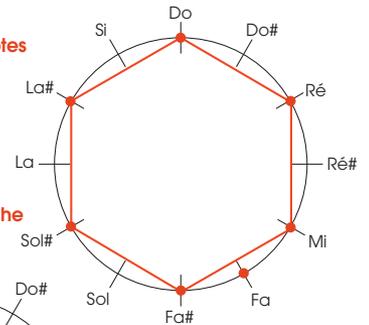
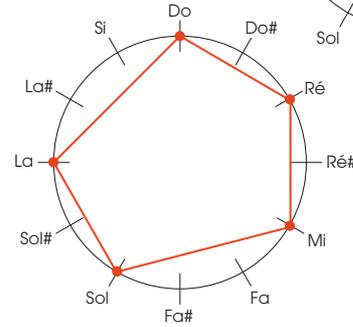
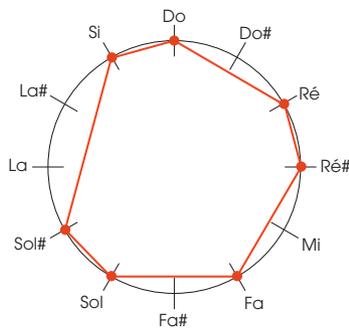
pas ici. Sachez seulement que ces douze notes sont réparties régulièrement : l'écart entre deux notes consécutives est toujours le même à l'oreille. Pourquoi donner le même nom à des notes différentes, comme un do aigu et un do grave ? Bien sûr, ce n'est pas le même son, mais... presque. Testez-le vous-même, la prochaine fois que vous passerez



**Figure 1. Les douze notes de la musique occidentale, placées en cercle. Le symbole « # » signifie « dièse ». L'écart entre deux notes consécutives est toujours le même à l'oreille. C'est par cet écart que débute « La Lettre à Élise », de Ludwig van Beethoven : pour jouer le début de cette mélodie, vous pouvez indifféremment alterner « do#/do » ou « ré/do# » ou « ré#/ré »...**



**Figure 2. Représentation polygonale du mode majeur, du mode mineur, du mode pentatonique et de la gamme par ton (de gauche à droite).**



devant un clavier quel qu'il soit : jouez deux notes quelconques ensemble. Si et seulement si ces deux notes se trouvent à douze notes d'écart (on parle d'octave), vous aurez presque l'impression de ne jouer qu'une seule note. D'où le fait que l'on ait pensé représenter les douze notes, sans préciser si elles sont aiguës ou graves, sur un cercle (fig. 1).

## LE CHOIX D'UN MODE

Parmi ces douze notes, suivant l'atmosphère dans laquelle on veut se placer, on décide d'en privilégier un certain nombre. Plus exactement on choisit un *mode*, c'est-à-dire la série d'espacements que l'on va laisser entre les différentes notes que l'on va jouer, puis une note de départ (pour simplifier, on partira ici toujours d'un do). Ces notes forment le « squelette » du morceau, ce sont celles sur lesquelles il prend appui, même s'il n'est pas interdit de jouer parfois les autres, pour produire un effet particulier. Le mode le plus connu, celui que tout le monde a naturellement dans l'oreille (du moins en Occident), est le mode majeur : do, ré mi, fa, sol, la, si. Pas de dièse (#) ni de bémol (b), mais juste les notes « de base » : c'est dans ce mode que sont écrites toutes les comptines (« Au clair de la lune », « J'ai du bon tabac », « Frère Jacques »...).

D'autres modes sont connus : le mode mineur, qui donne une impression de tristesse, le mode pentatonique, qui s'obtient par exemple en ne jouant que sur les touches noires d'un piano (alors que le mode majeur correspond aux touches blanches), et qui

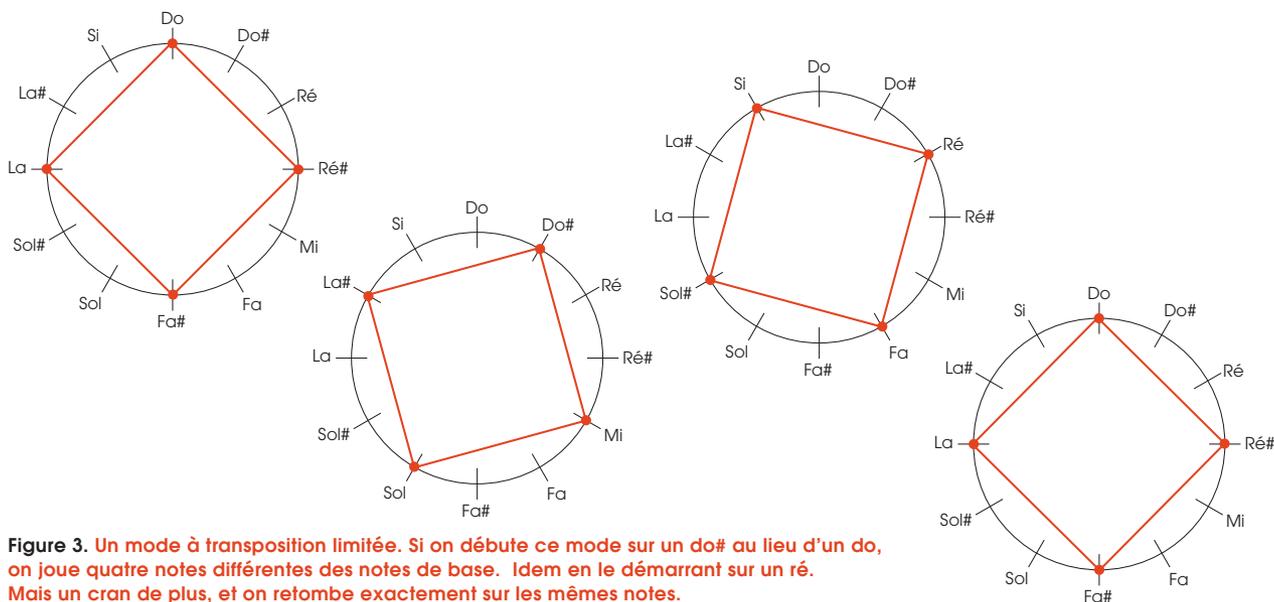
donne tout de suite une impression de musique orientale, le mode blues, la « gamme par ton » très utilisée par Claude Debussy et Maurice Ravel...

Parlons, en passant, des deux cas extrêmes. Au début des années 1950, György Ligeti, un compositeur hongrois, a composé une série de onze morceaux, « Musica ricercata », dont le premier ne se joue qu'avec une note, à l'octave près naturellement. Pour être tout à fait honnête, une deuxième note fait son apparition dans le tout dernier accord du morceau, faisant justement basculer l'équilibre auquel l'oreille s'était habituée. À l'autre extrême, le dernier morceau de cette série est « dodécaphonique » : les douze notes comptent autant les unes que les autres. En moyenne, elles apparaissent donc toutes le même nombre de fois dans le morceau. Là encore, avec un peu d'habitude, ce style de musique devient vite parfaitement identifiable après quelques notes.

## UN MODE... POLYGONAL !

Quel est le rapport avec la géométrie ? Tout simplement le fait que choisir un mode, c'est tracer un polygone dont les sommets sont choisis parmi les douze notes placées sur le cercle (fig. 2). Et certaines notions musicales trouvent alors une traduction immédiate en termes mathématiques. En voici deux exemples.

Tout en gardant le même mode, on peut prendre une autre note de départ que le do. C'est ce que l'on appelle en musique une *transposition*. On transpose parce qu'on a la voix trop grave ou pas assez, un instrument différent de celui prévu, ou parce qu'un accord est



**Figure 3. Un mode à transposition limitée. Si on débute ce mode sur un do# au lieu d'un do, on joue quatre notes différentes des notes de base. Idem en le démarrant sur un ré. Mais un cran de plus, et on retombe exactement sur les mêmes notes.**

trop difficile à jouer tel quel... Sur la représentation en cercle, transposer revient simplement à faire tourner le polygone formé par les différentes notes appartenant au mode choisi. Cela n'a l'air de rien, et pourtant... Rien que cette façon de se représenter les choses a permis aux mathématiciens de résoudre en deux coups de cuillère à pot un problème que le grand compositeur Olivier Messiaen s'était posé indépendamment de leurs travaux et, est-il besoin de le préciser, pour des raisons purement musicales.

### LES TRANPOSITIONS OU LES ROTATIONS

Son but était de trouver tous les modes à transposition limitée. Entendez par là que certaines transposi-

tions de ces modes sont faites exactement des mêmes notes qu'avant la transposition. Un exemple pour être plus clair : prenez les notes « do, ré#, fa#, la ». Rien de bien frappant là-dedans, surtout pour un non-musicien. Mais regardez comment se placent ces notes sur le cercle (fig. 3)... Cela saute aux yeux : elles forment un carré ! Donc si l'on fait tourner d'un quart de tour c'est-à-dire si l'on décale de trois notes, cela nous fait prendre comme note de départ le ré# au lieu du do, mais finalement on va retomber exactement sur les quatre mêmes notes. Ce mode est donc à transposition limitée.

À l'inverse, vous pouvez le tester, le mode majeur n'est pas à transposition limitée : dans toutes les transposi-

## Le « Clapping music » de Steve Reich

**Le compositeur Steve Reich a dû résoudre le même problème que Olivier Messiaen et ses transpositions limitées, mais à propos de rythmes. Son morceau « Clapping music » (1972) est écrit de façon très simple : deux personnes frappent des mains ensemble un même rythme, que l'on peut représenter sur un cercle, puisqu'il se répète en boucle (figure 1).** Sur douze « pulsations », les interprètes tapent huit fois des mains : d'abord trois fois de suite, puis deux fois de suite, puis une fois, puis deux fois de suite avant de recommencer. Entre chaque série de claquements de mains, ils laissent passer une pulsation sans taper des mains. On peut donc écrire ce rythme de façon peut être plus intuitive : « 123-12-1-12 », chaque nombre correspondant à un claquement de mains, et chaque blanc à une pause.

Au bout d'un moment, l'un des deux « transpose » le rythme, c'est-à-dire qu'il se décale d'un cran, puis de deux, de trois... jusqu'à revenir au point de départ. L'autre doit continuer imperturbablement le même rythme. À chaque fois, la superposition des deux rythmes, l'un décalé et l'autre fixe, fait entendre une nouvelle « musique »... à condition, bien sûr, de ne pas retomber en phase avec celui qui ne se décale pas avant d'avoir fait le tour complet ! La condition à vérifier pour le choix du rythme de base est donc exactement la même que celle fixée pour les gammes à transposition non limitée, et un mathématicien pourrait trouver une méthode pour générer tous les « Clapping music » possibles... À voir s'ils seraient aussi intéressants que celui de Steve Reich !

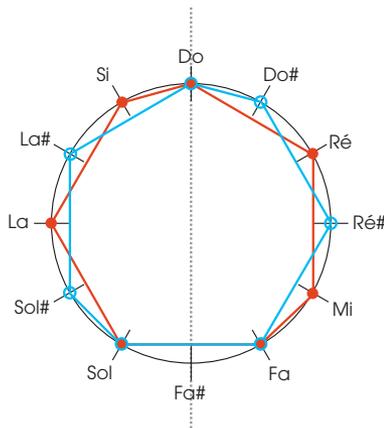


Figure 4. Le polygone de la gamme majeure (en orange), et son « inverse » (en bleu), c'est-à-dire son symétrique par rapport au diamètre (do, fa#). La mélodie inverse d'une mélodie écrite sur les notes orange sera écrite avec des notes bleues.

tions, une note au moins différera, à moins de faire... un tour entier, c'est-à-dire ne rien faire ! Étudier les transpositions limitées ou non d'un certain mode peut donc revenir à s'intéresser à des propriétés de figures géométriques élémentaires. Sans cet outillage, Messiaen avait oublié quelques modes dans sa liste...

### L'INVERSION OU LA SYMÉTRIE

Autre exemple. Depuis (au moins) les fugues de Jean-Sébastien Bach jusqu'aux adeptes de la musique dodécaphonique, l'un des « outils » des compositeurs est l'inversion d'une mélodie : on reprend les mêmes écarts de notes, mais à l'envers : si la mélodie initiale commençait par « monter » d'un do à un ré, par exemple,

on commencera par descendre, d'un même intervalle (du do au la#, donc), et ainsi de suite pour toute la mélodie. On ne reste donc *a priori* pas sur les mêmes notes que la mélodie de départ, mais sur les notes qui se trouvent sur le polygone symétrique du premier par rapport au diamètre passant par la note de départ (fig. 4).

On peut aussi imaginer des symétries par rapport à n'importe quel axe : certains compositeurs sérialistes (une variante du dodécaphonisme) en ont fait l'usage. Ici encore, la connaissance qu'ont les mathématiciens des symétries d'un polygone, c'est-à-dire de l'ensemble des transformations qui le laissent invariant, et leur façon d'aborder ces questions, peuvent aider à analyser certaines œuvres musicales ou à résoudre des problèmes que les compositeurs peuvent, plus ou moins naturellement, être amenés à se poser.

### CE N'EST QU'UN DÉBUT...

Bien entendu, cette représentation en cercle n'est ni très compliquée, ni parfaite. Elle ne peut heureusement pas représenter toute la complexité de l'ensemble des œuvres musicales. Elle permet cependant de se rendre compte de l'intérêt que ce genre de modèle peut avoir, et d'expliquer ce que cherchent des mathématiciens ou des informaticiens mélomanes, en lien avec des compositeurs ou des spécialistes de l'analyse musicale : de nouvelles représentations de la structure de morceaux tenant compte, par exemple, de l'ordre des notes, de l'enchaînement des accords, des hauteurs des notes (aigu ou grave), du rythme... Comment s'arranger pour que deux musiques qui nous semblent proches à l'oreille soient représentées par des objets géométriques proches l'un de l'autre ? Toutes les représentations ne sont pas forcément adaptées à tous les styles, toutes les époques. Le but est d'en développer le plus possible pour mieux comprendre comment les morceaux sont faits, trouver d'éventuelles parentés, attendues ou non. Et, pourquoi pas, aider les compositeurs actuels à résoudre des problèmes, voire leur offrir de nouveaux outils pour composer différemment. Un morceau intéressant d'un point de vue géométrique le sera-t-il à l'écoute ? L'inverse est-il toujours vrai ? R. J.

### Pour en savoir plus

Conférence au Palais de la découverte le samedi 11 juin à 15 h, en salle de conférence.  
Entrée libre dans la limite des places disponibles  
Intervenants : Moreno Andreatta (IRCAM), Carlos Agon (IRCAM), Pierre Audin et Robin Jamet (Palais de la découverte)

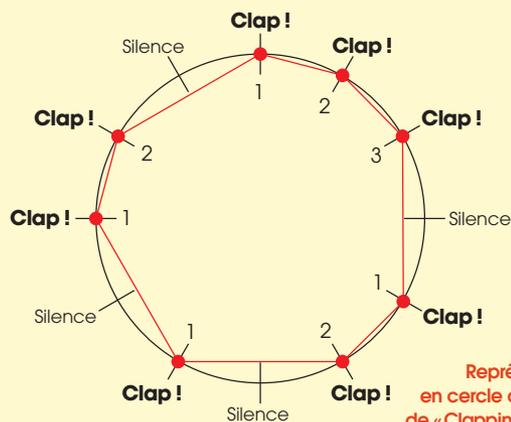


Figure 1. Représentation en cercle du rythme de « Clapping music ».