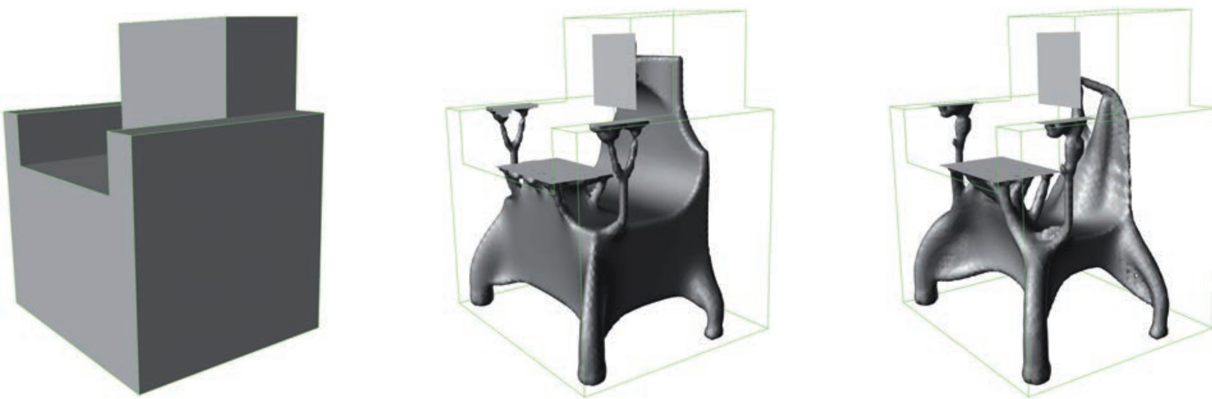
Formes mathématiques

À la recherche de la forme parfaite



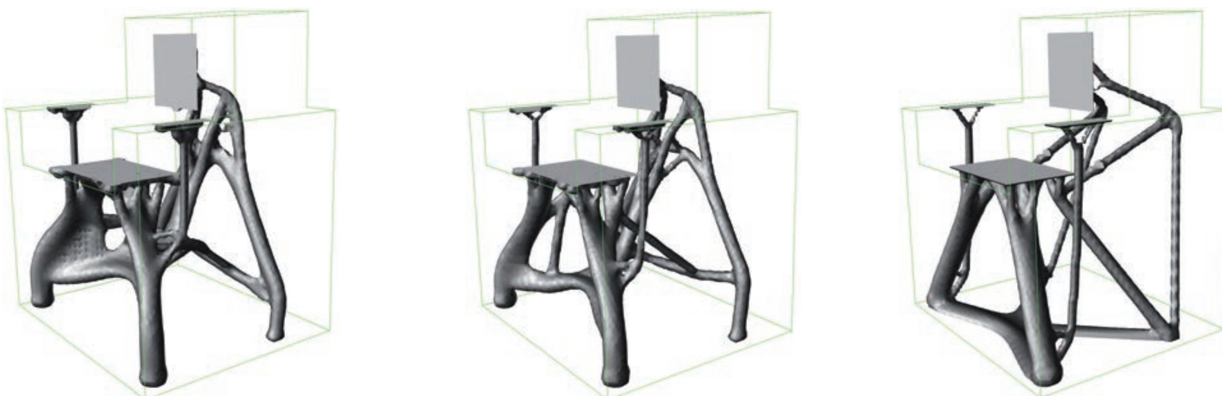
Les formes ont toujours passionné les mathématiciens. Dès l'Antiquité, l'étude des « formes parfaites » a constitué l'un des piliers de la pensée mathématique. Aujourd'hui encore, les mathématiciens recherchent des formes idéales, mais dans un sens assez éloigné de la vision des philosophes grecs, et de plain-pied avec des applications actuelles importantes.

PAR **FRANÇOIS JOUVE**, MATHÉMATICIEN ET PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS 7)

Qu'est-ce que « l'optimisation de formes » ? Nous allons illustrer ce que nous entendons par là à travers un problème moins ancien que l'Antiquité puisqu'il a été formulé en 1633 par Galilée (1564-1642). Il s'agit du problème de la « brachistochrone ». Lâchons un objet sans vitesse initiale depuis un point A sur un support allant jusqu'à un point B situé en contrebas. Nous supposons que cet objet n'est soumis qu'à la force de gravitation : il glisse sans frottement sur son support. Quelle forme doit avoir ce dernier pour que l'objet aille le plus vite possible de A à B ? Autrement dit, quelle courbe minimise le temps de parcours entre A et B ? Galilée donna une solution erronée en proposant l'arc de cercle.

En 1696, Jean Bernoulli (1667-1748) fit de ce problème une sorte de concours pour quelques grands scientifiques de l'époque (son frère, Jacques Bernoulli, Newton, Leibniz, L'Hôpital et Tschirnhaus) et trouva la bonne solution : la forme optimale est ici un arc de cycloïde (fig. 1). Il ne donna toutefois pas une preuve complète de l'existence et de l'unicité de la solution. Ce problème intéressa par la suite de nombreux mathématiciens, dont Leonhard Euler (1707-1783) qui s'en servit pour jeter les bases d'une branche très

On cherche à obtenir, à l'intérieur du domaine représenté en vert, la forme de fauteuil la plus rigide que l'on puisse fabriquer avec une quantité de matériau donnée. L'algorithme part du domaine rempli de matière et bouge le bord jusqu'à trouver une forme optimale. © F. Jouve.



féconde des mathématiques appelée « calcul des variations ». La démonstration complète et rigoureuse, montrant que la cycloïde est l'unique solution, ne fut trouvée qu'au milieu du XXe siècle.

GÉNÉRALISONS

Considérons maintenant le problème de la brachistochrone sous un angle plus général en remarquant que sa formulation fait intervenir trois ingrédients :
– une loi d'état qui régit le système physique sous-jacent (ici la loi qui décrit le mouvement d'un objet réduit à un point matériel, soumis à la gravité, qui glisse sur une courbe sans frottement),
– un critère à optimiser (le temps de parcours),
– et un ensemble de « formes » admissibles (toutes les courbes continues qui relient A et B).

Ainsi décrit, il est aisé de le généraliser – au moins formellement – à un ensemble plus vaste de problèmes dans lesquels l'inconnue à trouver est une forme. Pour cela, il faut que les trois ingrédients soient présents.

Par exemple, nous allons nous intéresser, dans la suite de cet article, à la mécanique des solides déformables : nous cherchons une forme qui maximise un critère de rigidité pour toutes les géométries possibles ayant un volume donné et constitué d'un matériau ayant des propriétés mécaniques données. On ne cherche alors plus une courbe mais un objet tridimensionnel quelconque.

Ce type de problème a commencé à être étudié au début du XXe siècle, en particulier par Jacques Hadamard (1865-1963), mais il a fallu attendre les années 1970-80 et des méthodes informatiques permettant de le traiter, pour en avoir une vision plus précise, tant du point de vue théorique que pratique. À part

Figure 1. Cette expérience, que vous pouvez retrouver au premier étage du Palais de la découverte, permet de tester trois chemins entre deux points situés à deux altitudes différentes : un segment de droite, une ligne brisée constituée de deux segments de droite et une cycloïde. De ces trois chemins, lequel est le plus rapide ? © G. Reuiller.

quelques cas particuliers construits de façon astucieuse, il n'est pas possible en général de trouver sur le papier des solutions explicites. Si l'on s'intéresse à des applications pratiques, il est donc souvent nécessaire de construire des méthodes numériques sur ordinateur permettant d'approcher les éventuelles solutions (éventuelles car il n'en existe pas toujours dans l'ensemble de formes que l'on s'est donné !). Il y a alors essentiellement deux approches utilisées pour le faire.

PAR DÉFORMATIONS SUCCESSIVES...

La première méthode pour attaquer ce type de problème est issue des idées d'Hadamard : elle consiste à choisir une forme initiale et à la déformer par petits pas successifs de telle sorte que chaque modification infinitésimale améliore le critère que l'on veut optimiser. On qualifie ces méthodes de « variation de frontière » car elles agissent sur le bord d'une forme donnée au départ. La figure en tête d'article est une illustration de cette approche. L'algorithme part ici d'une forme remplissant tout l'espace admissible et sculpte petit à petit dans la masse pour obtenir un fauteuil optimal du point de vue de sa rigidité, et qui possède un volume global de matière fixé.

Pour se faire une idée des obstacles que doivent surmonter ce type d'algorithme, imaginons que nous explorons un paysage vallonné à la recherche du point le plus bas (fig. 2). Une technique classique consiste à démarrer d'un point quelconque (M sur le dessin) et à suivre à chaque instant la ligne de plus grande pente, comme le ferait une goutte d'eau. Dans ce cas, on arrive toujours à un point d'altitude localement minimale (une flaque d'eau), c'est-à-dire un point entouré de points plus élevés (C sur le dessin). Mais si la topographie est un peu chahutée, les flaques ne nous indiqueront pas forcément le fond de la vallée : ces minima locaux ne seront pas forcément le minimum global que l'on recherche (sur le dessin E est en fait plus bas que C). Il faut donc construire des algorithmes capables de ne pas se noyer dans une flaque d'eau, c'est-à-dire capables de « s'échapper » des pièges des minima locaux.

En fait, cette difficulté apparaît dans la plupart des problèmes intéressants d'optimisation de forme. Ce n'est d'ailleurs pas la seule car pour pouvoir appliquer ce genre de technique, il faut être capable de déterminer l'équivalent de la « ligne de plus grande pente », ce qui n'est pas toujours aisé. Et il faut de plus s'assurer que la solution obtenue ne dépend pas du point de départ choisi.

... OU EN CRÉANT DES TROUS

La seconde approche pour optimiser la rigidité d'une forme constituée d'une quantité de matière fixée n'utilise pas la description du bord de la forme. Elle consiste à optimiser la densité de matière en chaque point du domaine censé contenir cette forme. Elle mène à des problèmes qui sont mieux posés mathématiquement : plus de soucis de minima locaux ou de dépendance de la solution par rapport à la forme de départ. Mais les solutions qu'ils engendrent ne sont plus tout à fait des « formes » au sens classique du terme car elles peuvent avoir un nombre arbitraire de trous, y compris une infinité de tailles infinitésimales, qui sont souvent plus efficaces qu'un seul de même volume !

Les formes optimales ainsi produites peuvent alors nécessiter d'être construites dans un matériau microporeux. Mais il est aussi possible d'en déduire des formes quasi optimales n'ayant pas de microstructures et dont le comportement est très proche de la forme optimale. La figure 3 montre une console obtenue de cette façon : il s'agissait de trouver la structure la plus rigide contenue dans un rectangle, encastrée sur la face de gauche et soumise à une force verticale au milieu de la face de droite. La première figure montre une forme généralisée optimale contenant des microperforations ; la deuxième forme est une structure plus classique, déduite de la précédente et pratiquement aussi rigide.

Ce passage par une « forme » comportant un nombre arbitraire de trous est une astuce de mathématicien : il s'agit de modifier le problème (en s'autorisant à faire des trous dans la forme) afin qu'il admette une solution, même si cette dernière n'est pas au final une forme que l'on peut dessiner. Mais ce n'est pas que cela. En effet, on observe aussi dans la nature des matériaux compor-

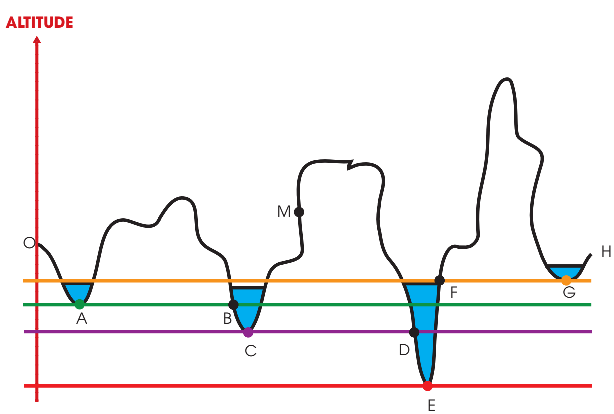


Figure 2. En termes d'altitude, les points A, C, E et G sont des minima locaux. Mais le seul qui est aussi un minimum global est E. Le point A n'est en effet le point d'altitude minimale que pour la partie du relief allant de O à B. C est celui de la partie du relief allant de O à D, etc. En revanche, dans tout le relief, aucun point n'est plus bas que E. © G. Reuiller.

tant des microstructures. L'intérieur de certains os est par exemple constitué de matériau poreux, leur permettant d'être à la fois rigides et légers (fig. 4).

Cette deuxième méthode est plus rigoureuse mathématiquement mais moins générale du point de vue des problèmes qu'elle permet de traiter. En effet, on n'est pas capable de déterminer la bonne densité de matière en chaque point pour n'importe quel problème physique et n'importe quel critère à optimiser. Par exemple, comment appliquer cette méthode dans le problème de la brachistochrone ? Ces deux approches sont donc complémentaires et peuvent d'ailleurs être couplées entre elles.

MAIS À QUOI ÇA SERT ?

Les applications de ces méthodes sont nombreuses. Elles sont appelées à se développer avec l'augmentation de la puissance des ordinateurs et l'intégration des dernières avancées de la recherche dans les logiciels commerciaux utilisés par les industriels. Par exemple dans l'automobile ou l'aéronautique, tout gain de poids se traduit immédiatement en termes d'efficacité énergétique et de diminution des rejets de CO_2. La structure interne de l'aile de l'Airbus A380 est directement issue de calculs d'optimisation de forme, et de nombreuses pièces industrielles commencent à tirer parti de ces méthodes.

Mais la génération automatique de formes inattendues peut aussi avoir des applications plus inhabituelles dans le domaine du design ou de l'architecture (fig. 5). En observant cette image, vous pouvez mesurer à quel point la recherche de formes optimales actuelle est éloignée de celle des formes parfaites des mathématiciens grecs : nulle trace dans cet immeuble de polygones réguliers ou de cercles… **F. J.**

Pour en savoir plus

Sur la cycloïde, vous pouvez lire l'article de « Formes mathématiques » paru dans le n° 356 de la revue *Découverte*.

Sur l'optimisation des formes, vous pouvez consulter les trois articles écrits par Grégoire Allaire et François Jouve sur l'excellent site internet du CNRS « Images des mathématiques » :
http://images.math.cnrs.fr/Design-et-formes-optimales-I.html
http://images.math.cnrs.fr/Design-et-formes-optimales-II.html
http://images.math.cnrs.fr/Design-et-formes-optimales-III.html
et aussi :
http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo

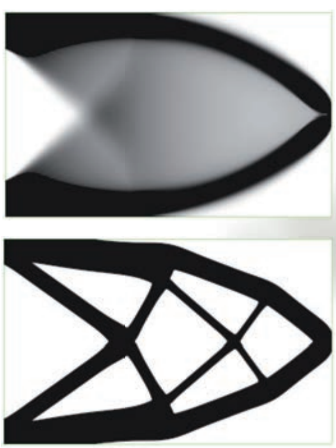


Figure 3. La console optimale obtenue en créant une infinité de trous (en haut), visualisée par une densité de gris, et la forme classique quasi optimale que l'on peut en déduire. © F. Jouve.
Figure 4. La nature utilise elle aussi parfois des matériaux poreux pour créer des structures à la fois rigides et légères. © INSERM / M. Depardieu.
Figure 5. Un immeuble du futur généré par un algorithme d'optimisation de forme. © R&Sie(n) et le Laboratoire / 2011.