Formes mathématiques

Le problème d'Isis

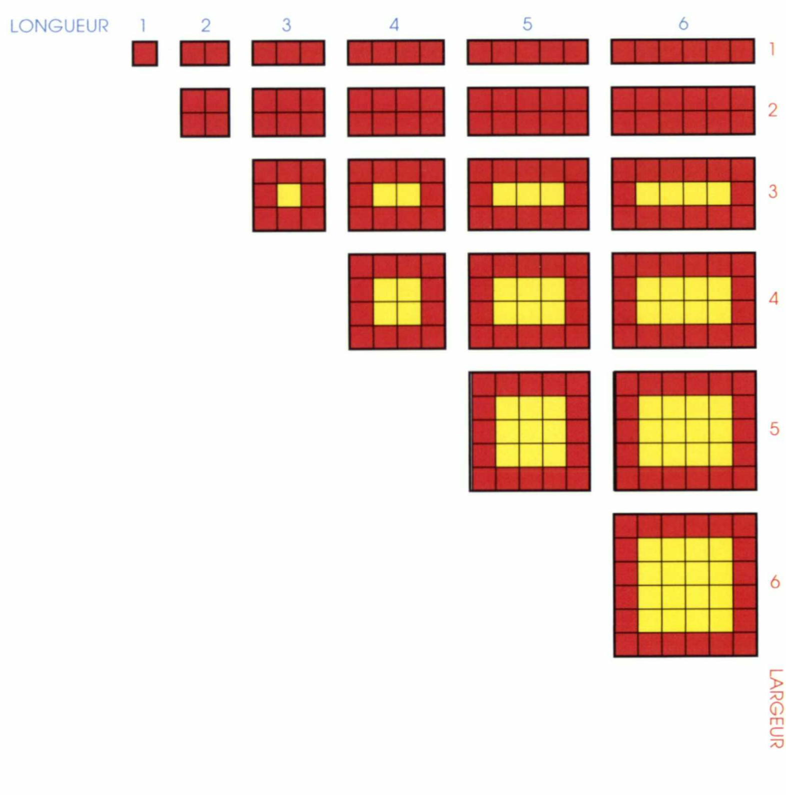
Il y a souvent plusieurs manières de résoudre un problème mathématique, surtout quand il est simple d'énoncé. Tel est le cas du problème d'Isis, qui consiste à déterminer tous les rectangles à mesures entières dont le périmètre est égal à l'aire. Plus que de trouver la solution, ce qui va motiver alors le mathématicien c'est la recherche d'une « belle » preuve, à la fois élégante, fulgurante et limpide.

PAR **GUILLAUME REUILLER**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Avec une ficelle, vous pouvez évaluer le périmètre d'un rectangle, en la plaçant très exactement sur son pourtour, en la coupant quand vous êtes revenu au point de départ, puis en la tendant et en la mesurant. Mais vous ne pouvez pas estimer de la même manière l'aire de ce rectangle. En effet, si vous recouvrez le plus rigoureusement possible sa surface avec une corde enroulée en spirale, puis que vous la mesurez après l'avoir tendue, la mesure dépendra évidemment du diamètre de la corde en question : un fil de pêche ou une corde, comme celles utilisées sur les bateaux, ne donneront pas le même résultat. Cette petite expérience montre que le calcul de l'aire fait intervenir deux dimensions et celui du périmètre une seule. Ces deux mesures ne peuvent donc être confondues.

Le problème d'Isis (encadré *L'origine du problème d'Isis*) consiste à trouver tous les rectangles dont la longueur et la largeur sont des nombres entiers (une unité étant choisie) non nuls et dont le périmètre est égal à l'aire. De prime abord, le problème d'Isis peut sembler mal posé, d'après la remarque du paragraphe précédent. Mais si le périmètre et l'aire sont

Parmi ces rectangles, lesquels ont une aire égale à leur périmètre ? En existe-t-il d'autres ? © Palais de la découverte / G. Reuiller.



considérés seulement comme des nombres et non comme des mesures, l'ambiguïté est en fait levée.

À TÂTONS

Avec très peu de connaissances mathématiques, vous pouvez commencer à explorer empiriquement ce problème... en testant de manière systématique tous les (petits) rectangles à mesures entières. Concrètement, nous faisons varier la longueur et la largeur du rectangle de 1 à 6 (fig. 1). Pour chaque rectangle obtenu, nous calculons le périmètre (le double de la somme de la longueur et de la largeur) et l'aire (produit de la longueur par la largeur). Il est facile alors de voir que les deux valeurs coïncident deux fois : pour un rectangle de dimensions 4 × 4 (un carré en fait...) et un autre de dimensions 3 × 6.

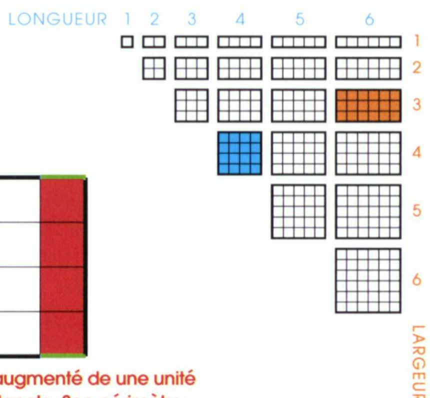
Nous avons donc trouvé deux solutions au problème d'Isis : y en a-t-il d'autres ? C'est en fait cette question qui rend le problème véritablement intéressant... Pour le savoir, réfléchissons aux conséquences, sur le périmètre et l'aire d'un rectangle, de l'augmentation de une unité de l'un de ses côtés. Si vous augmentez de une unité la longueur (respectivement la largeur) d'un rectangle, son périmètre augmente de deux unités et son aire de une fois sa largeur (respectivement sa longueur), comme vous pouvez le constater sur la figure 2 ou... sur la figure 1. En effet, dans le tableau « périmètres », vous passez d'une colonne à la suivante en ajoutant 2, alors que dans le tableau « aires », vous le faites en ajoutant la valeur de la largeur, indiquée en orange à droite de la ligne. Inévitablement, pour des longueurs et des largeurs supérieures à 6 unités, l'aire du rectangle va augmenter plus vite que son périmètre, qui ne va jamais plus la rattraper. Il ne peut donc pas y avoir d'autres solutions au problème d'Isis.

Cette méthode est efficace mais pas particulièrement élégante, car elle consiste à regarder au cas par cas. Elle est donc un peu « laborieuse », même si le nombre de cas reste restreint.

UN PEU D'ARITHMÉTIQUE

Si vous n'êtes pas totalement novice en mathématiques ou que vous avez des souvenirs de vos cours de collège ou de lycée, votre premier réflexe est probablement de mettre le problème d'Isis en équation pour tenter de le résoudre. Notons x et y respectivement la largeur et la longueur du

Figure 1. Essais pour des « petits » rectangles. D'abord les dessins des rectangles, puis les périmètres correspondants et enfin les aires. Les valeurs ne coïncident que deux fois (cas bleu et cas orange). © Palais de la découverte / G. Reuiller.



Périmètres

Largeur \ Longueur	1	2	3	4	5	6
1	4	6	8	10	12	14
2		8	10	12	14	16
3			12	14	16	18
4				16	18	20
5					20	22
6						24

Aires

Largeur \ Longueur	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2		4	6	8	10	12
3			9	12	15	18
4				16	20	24
5					25	30
6						36

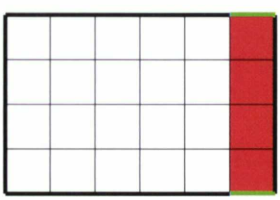


Figure 2. Nous avons augmenté de une unité la longueur de ce rectangle. Son périmètre a augmenté alors de 2 unités (en vert) et son aire de 4 (en rouge), soit une fois la largeur du rectangle. © Palais de la découverte / G. Reuiller.

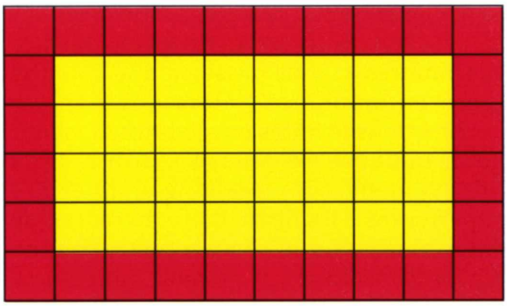


Figure 3. Pavage d'un rectangle à mesures entières par des carrés unitaires en bordure (en rouge) et intérieurs (en jaune). © Palais de la découverte / G. Reuiller.

Figure 4. Les deux solutions au problème d'Isis.
© Palais de la découverte / G. Reuiller.

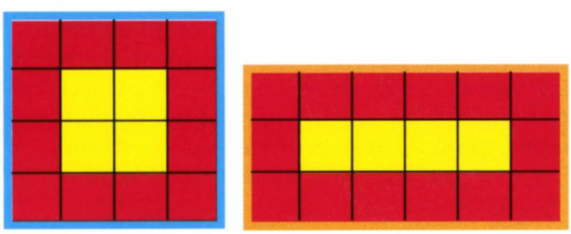


Figure 5. Une tentative pour résoudre la variante « 3D » du problème d'Isis. © G. Reuiller.

(ou des...) rectangle(s) que nous cherchons. Le périmètre du rectangle est alors $2(x + y)$ et son aire $x \times y$. Notre problème consiste donc à résoudre l'équation : $x \times y = 2(x + y)$, où x et y doivent être des entiers strictement positifs, x étant le plus petit des deux. Comment s'y prendre ?

En fait, cette équation peut aussi s'écrire : $(x - 2) \times (y - 2) = 4$ (vérifiez-le...) et devient alors très facile à résoudre. En effet, tout comme x et y, $x - 2$ et $y - 2$ sont des nombres entiers, dont nous savons maintenant que le produit vaut 4. Or, il n'y a que quatre façons d'écrire 4 comme produit de deux nombres entiers : $4 = 2 \times 2$, $4 = 1 \times 4$, $4 = (-1) \times (-4)$ et enfin $4 = (-2) \times (-2)$. Par conséquent :

– soit $x - 2 = 2$ et $y - 2 = 2$, c'est-à-dire $x = y = 4$;
– soit $x - 2 = 1$ et $y - 2 = 4$, c'est-à-dire $x = 3$ et $y = 6$;
– soit $x - 2 = -1$ et $y - 2 = -4$, c'est-à-dire $x = 1$ et $y = -2$, ce qui est exclu ;
– soit $x - 2 = -2$ et $y - 2 = -2$, c'est-à-dire $x = y = 0$, ce qui est exclu également.

Nous retrouvons donc bien les deux solutions obtenues par la méthode précédente. Si cette démarche est tout aussi efficace que la première, on peut lui reprocher tout de même son « classicisme »...

AH, LA BELLE PREUVE !

Voici maintenant une autre preuve plus originale et qui frappe par sa simplicité. Une unité étant fixée, un rectangle, dont la longueur et la largeur sont des nombres entiers, peut être pavé par des carrés unitaires (fig. 3). Nous pouvons distinguer les carrés intérieurs du pavage (en jaune), qui participent à l'aire de ce rectangle mais pas à son périmètre, des carrés en bordure (en rouge), qui participent à son aire et à son périmètre.

Plus précisément, pour des rectangles de largeur au moins 2, le périmètre du rectangle est égal au nombre de carrés rouges auquel nous devons ajouter 4 (sur la figure 3, le nombre de carrés rouges est 28 alors que le périmètre du rectangle est $(10 + 6) \times 2 = 32$). En effet, les quatre carrés rouges placés dans les coins participent à deux côtés du rectangle et, par conséquent, comptent deux fois pour le calcul du périmètre. L'aire du rectangle est égale à ce même nombre de carrés rouges auquel il faut ajouter cette fois le nombre de carrés jaunes. Pour que les deux soient égaux, il faut donc que le nombre de carrés jaunes soit

L'origine du problème d'Isis

En 1990, le mathématicien Brian Greer, de l'université de Portland (États-Unis), découvre dans le livre *L'univers mathématique*, de Philip J. Davis et Reuben Hersh, une description par Plutarque (env. 46-125) du culte d'Isis dans l'Égypte Antique. Dans cette description, qui mêle allégrement numérologie et connaissances mathématiques et confond nombres et figures géométriques, sont évoqués les nombres (sous-entendu entiers) qui « ont leurs périmètres égaux aux aires qu'ils renferment ». Dans une note de bas de page, les auteurs laissent le soin au lecteur de trouver ces nombres.
En bon mathématicien qui se respecte, Brian Greer s'attèle à la tâche et s'amuse à déterminer plusieurs méthodes différentes pour répondre à la question posée. Dans le cadre d'une recherche didactique sur la résolution de problèmes, il soumet le « problème d'Isis » à des groupes d'étudiants afin d'analyser les démarches qu'ils mettent en œuvre pour le résoudre (trop compliquées, pas assez rigoureuses...) et les perceptions qu'ils peuvent en avoir.

égal à 4. Or, il n'y a que deux manières de disposer les 4 carrés jaunes en rectangle (fig. 4) :
– soit en carré, le rectangle est alors lui aussi carré et de côté 4 ;
– soit sur une seule ligne, les dimensions du rectangle sont alors 3 et 6.
Il ne reste plus qu'à regarder les rectangles de largeur 1. Mais il n'est pas très difficile de montrer qu'ils ne peuvent être solutions du problème d'Isis : si le rectangle est de largeur 1, son aire vaut une fois sa longueur et le périmètre est donc plus grand que l'aire de une longueur et de deux largeurs.
À noter que si x et y sont les dimensions du rectangle de départ, les dimensions du rectangle intérieur, c'est-à-dire constitué des seuls carrés jaunes, sont $x - 2$ et $y - 2$. Ce rectangle est donc composé de $(x - 2) \times (y - 2)$ carrés, et vouloir qu'il y en ait 4 revient à résoudre l'équation $(x - 2) \times (y - 2) = 4$ déjà rencontrée...

QUELQUES VARIANTES

Il est rare que la résolution d'un problème de mathématique ne soulève pas de nouvelles questions. Ici, vous pourriez vous demander ce qui se passe quand le polygone étudié n'est pas un rectangle, ni même un quadrilatère. Chercher, par exemple, tous les triangles à mesures entières dont l'aire est égale au périmètre se révèle beaucoup plus ardu que le problème d'Isis.

Vous pourriez passer aussi à la dimension supérieure et vous interroger sur l'existence de parallélépipèdes rectangles à mesures entières tels que leur volume soit égal à leur aire. Il serait tentant alors de « recycler » la dernière méthode que nous venons de voir et de subdiviser notre pavé en cubes unitaires (fig. 5). Dans un tel découpage, chaque cube unitaire contribue une seule fois au volume du pavé droit mais, en fonction de sa position, compte de 0 à 3 fois dans l'aire de ce pavé. Plus précisément, les cubes au cœur du pavé (invisibles sur la figure 5) ne participent à aucune face et donc ne comptent pas dans le calcul de l'aire. Les cubes à cheval sur deux faces (en jaune) comptent 2 fois, les cubes à l'intérieur d'une face (en vert) comptent 1 fois et les 8 cubes aux sommets (en rouge) comptent 3 fois. Le moins que l'on puisse dire, c'est que la méthode a perdu de sa simplicité et de son élégance...
En fait, dans ce cas de figure, d'autres méthodes plus classiques (que nous ne développerons pas ici) sont plus efficaces et rapides. Moralité : une belle démonstration est parfois le fruit d'un contexte particulier et quand ce contexte change, elle peut paraître beaucoup moins élégante, voire même ne plus pouvoir s'appliquer. Au mathématicien, alors, d'en chercher une nouvelle... **G. R.**

Remerciements : aux relecteurs de cet article, dont les commentaires estivaux ont contribué à l'améliorer, et à ma fille, pour avoir bien voulu me prêter ses jouets pour la figure 5.