



0

8

XIII

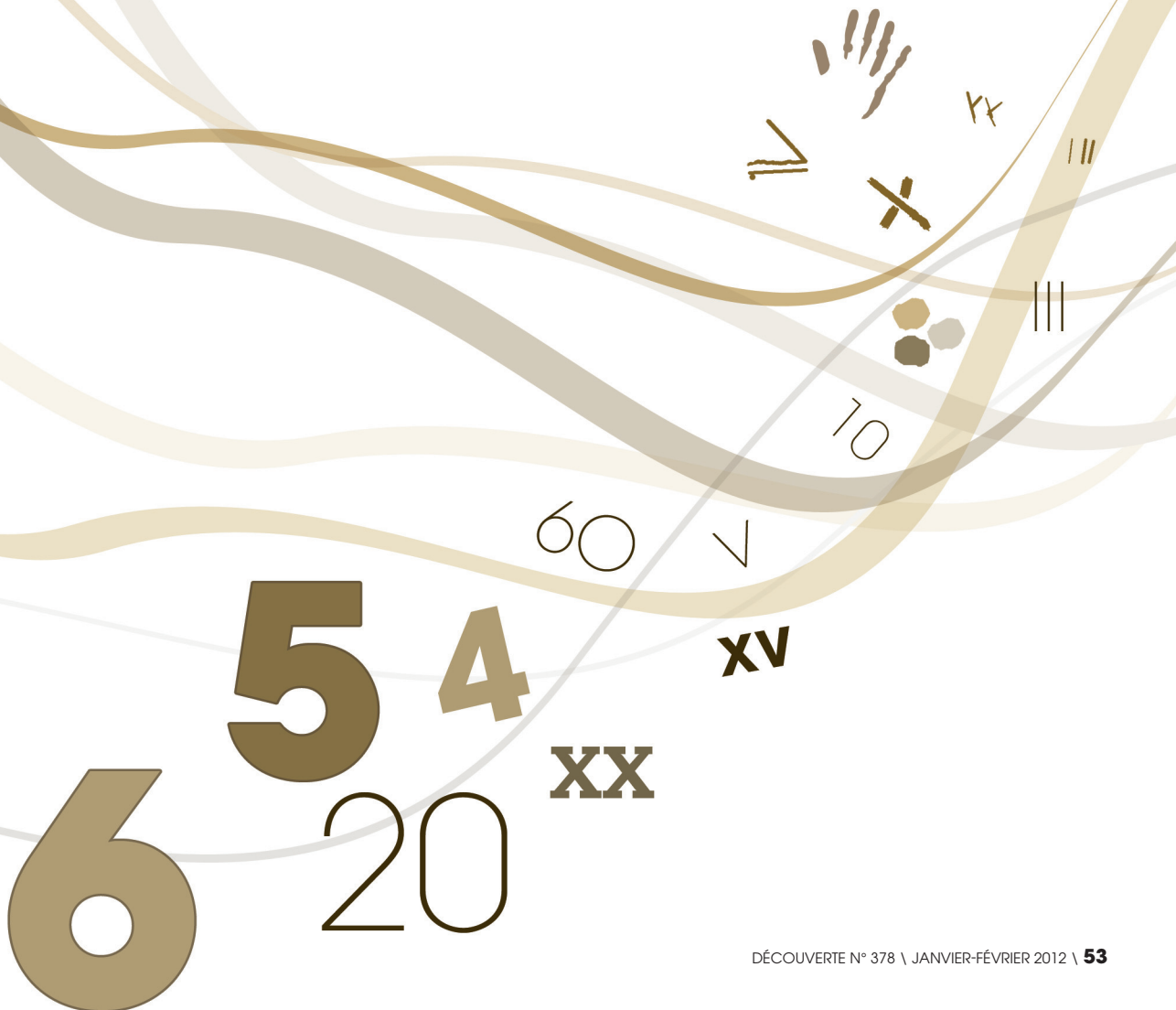
9

7

Au commencement étaient les nombres

Numéros de téléphone, salaires, données économiques, prévisions météorologiques, coordonnées GPS, adresses IP... L'omniprésence des nombres n'a jamais été aussi flagrante qu'aujourd'hui. Et pourtant, l'intuition première des nombres remonte vraisemblablement à l'époque même de l'émergence de la pensée humaine. Pourquoi et comment les hommes ont-ils un jour inventé les nombres ?

PAR **NICOLAS NGO**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE AU DÉPARTEMENT DE SCIENCES EXACTES ET APPLIQUÉES DE LA CITÉ DES SCIENCES ET DE L'INDUSTRIE



Qu'est-ce qu'un nombre ? Un nombre, c'est ce qui permet de compter. Certes, mais ce n'est pas tout. Car les nombres ont investi progressivement la plupart des activités humaines – mesurer, calculer, repérer, évaluer, quantifier, dater, prévoir... – au point d'en devenir indissociables. L'usage des nombres est devenu si quotidien, il nous est si naturel que nous oublions de nous en étonner. Nous oublions aussi que notre système de numération, qui nous paraît si évident aujourd'hui, est le fruit d'une longue histoire, dont chaque étape a représenté une conquête de la pensée. Il fut une époque où les nombres n'existaient pas. Comment les hommes ont-ils appris à compter ?

L'aube des mathématiques

Pour faire face à des problèmes pratiques du quotidien (apprendre à se repérer dans le temps et l'espace, par exemple) et optimiser leur survie, les premiers hommes, à la différence des autres espèces animales, ont cherché à comprendre les phénomènes qu'ils observaient. C'est ainsi qu'ils en sont venus à l'idée de la comparaison, du classement, de l'ordre, de la mesure, de la numération, du raisonnement, de la déduction... – autant d'activités qui constituent les éléments fondamentaux de ce que nous appelons les mathématiques.

CONSERVER LA QUANTITÉ

Fait surprenant, l'une des plus belles créations de la pensée humaine – les mathématiques – coïnciderait avec l'apparition même de l'humanité. On en retrouve les premières traces sur les rives du lac Édouard, entre l'Ouganda et la République démocratique du Congo. Ainsi, l'os pétrifié d'Ishango, vieux de plus de 20 000 ans, long d'une dizaine de centimètres, orné d'un cristal de quartz, est couvert de trois séries d'encoches groupées (fig. 1).



Figure 1. L'os d'Ishango est considéré comme l'une des premières traces de l'activité mathématique humaine. Les encoches qui ornent cet os témoignent probablement d'une volonté d'enregistrer une quantité.

© Institut royal des sciences naturelles de Belgique / T. Hubin (en haut) ; © Wikipédia (Institut royal des sciences naturelles de Belgique, Bruxelles) (en bas).

Certains archéologues ont vu dans ces encoches le signe d'une protoarithmétique, d'autres un premier calendrier lunaire... Il convient, toutefois, de rester prudent, car les mathématiques préhistoriques, à l'instar des autres activités intellectuelles, sont mal connues, faute de traces écrites. Les archéologues et les ethnomathématiciens en sont donc réduits à formuler des hypothèses quant à l'usage des rares objets qui ont été découverts. La seule chose que l'on puisse affirmer avec quelque certitude est que l'os d'Ishango s'apparente à un bâton de comptage. En ce sens, il constitue l'un des premiers témoignages d'une activité mathématique humaine. Ces encoches peuvent en effet être interprétées comme une tentative originelle de dénombrement, mais antérieure aux nombres. Le principe sous-jacent est celui d'une correspondance unité par unité : un élément de la

Petite expérience de « subitisation »

Essayez d'estimer d'un seul coup d'œil le nombre de bâtons ci-contre : IIII

Plutôt facile, non ? Maintenant, refaites l'exercice avec la collection suivante : √√√√√√√√√√

Au-delà de trois ou quatre objets, un individu lambda est obligé de compter ces objets pour en estimer la quantité.

Stanislas Dehaene, psychologue cognitif et neuroscientifique, montre qu'il existe au moins trois processus cognitifs distincts d'appréhension d'une quantité :

- la subitisation : faculté de perception immédiate d'une faible quantité ;
- l'estimation : évaluation rapide mais approximative d'une quantité plus importante ;
- le comptage : « permet d'énumérer avec précision un ensemble quelconque. Il consiste à appairer, un par un, chacun des objets énumérés avec une liste de référence qui peut être verbale (noms de nombres) ou non verbale (doigts, parties du corps).»

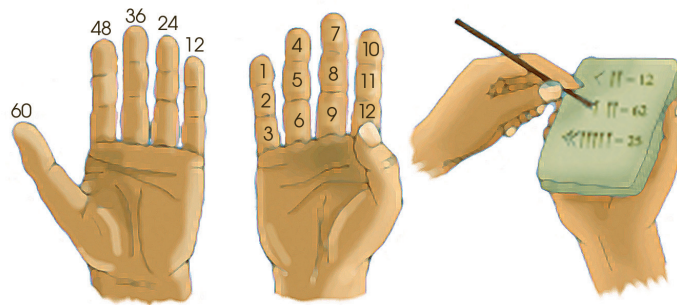


Figure 2. La base 60 résulte probablement de l'usage combiné de la douzaine (12 phalanges de la main droite) et de la base 5 (5 doigts de la main gauche). © D. R.

collection à dénombrer correspond à une entaille. Ainsi, après avoir appris à conserver le feu, les hommes préhistoriques ont appris à conserver les quantités, par la pratique d'entailles sur os.

La nécessité de conserver une quantité vient probablement du fait qu'au-delà de trois ou quatre objets, notre faculté de perception immédiate des nombres – que Stanislas Dehaene nomme « subitisation » (encadré *Petite expérience de « subitisation »*) – est prise en défaut : nous sommes contraints de compter ces objets. Les hommes ont perfectionné peu à peu le système d'entailles, qui a perduré bien après la Préhistoire, en particulier pour le comptage du bétail. Pour ne pas avoir à recompter une à une toutes ces marques, ils les ont regroupées par paquets, distinguant, par exemple, la graphie de la cinquième encoche (en l'inclinant ou en la notant sous forme de V...), puis celle de la dixième (notée en forme de X...) et ainsi de suite. Selon Georges Ifrah, historien des mathématiques, voilà certainement l'origine de nos chiffres romains : hérités des chiffres étrusques, ils incarnent une survivance de cette pratique ancestrale de l'entaille.

Compter par paquets, le principe de la base

Pour conserver une quantité, l'Homme a utilisé également le support qui lui était le plus naturel : son propre corps. N'avons-nous pas tous d'abord appris à compter sur nos doigts ? Voilà qui explique la prédominance quasi universelle de la base 10. On appelle « base » d'un

système de numération la référence utilisée, c'est-à-dire le nombre d'objets qui constitue un paquet.

Pourtant, certaines civilisations (tels les Mayas) compaient non seulement sur les dix doigts de leurs mains, mais aussi sur ceux de leurs pieds, ce qui les a conduits à employer la base 20. Les Celtes utilisaient eux aussi la base 20. Il en reste d'ailleurs une trace dans notre façon de compter. Dire « quatre-vingts » ou « quatre-vingt-dix » vous identifiera à coup sûr en Belgique : les Belges, en effet, préfèrent dire « octante » et « nonante ». Autre vestige de l'usage de cette base vicésimale, le nom de l'hôpital parisien des Quinze-Vingts, qui comptait à l'origine (en 1260) « quinze-vingts » lits, c'est-à-dire $15 \times 20 = 300$ lits !

En pointant, à l'aide de votre pouce, les trois phalanges de chacun de vos quatre autres doigts, vous découvrirez l'origine probable de la douzaine, traditionnellement usitée pour le comptage des œufs, des huîtres, des heures... Et en multipliant cette douzaine par les cinq doigts de votre autre main, vous obtiendrez $5 \times 12 = 60$ (fig. 2).

Cette fameuse base 60 a une place particulière dans l'histoire des mathématiques. Employée par les Sumériens plus de 3 000 ans av. J.-C. puis transmise aux Babyloniens, elle nous est parvenue par-delà le temps et les civilisations et est encore utilisée de nos jours. C'est la raison pour laquelle il y a 60 secondes dans une minute, 60 minutes dans une heure et 360 degrés (6×60) dans un cercle. Comment expliquer que l'on retrouve cette même base 60 dans la mesure du temps et dans celle de l'espace (en l'occurrence, ici, des



Figure 3. Les *calculi* – petits jetons argileux –, une fois enfermés dans une bulle d'argile, permettaient d'enregistrer les échanges commerciaux. Ils témoignent de l'usage de la base 60, ainsi que de la base 10 comme base auxiliaire. On remarque que la simple perforation du grand cône ou de la sphère multiplie leur valeur d'un facteur 10. © G. Iffrah.

Figure 4. Ces marques, gravées à la surface d'une bulle d'argile, symbolisaient les *calculi* enfermés à l'intérieur. L'encoche fine représentait l'unité, le petit trou la dizaine, l'encoche épaisse la soixantaine... Ces encoches sont considérées comme les plus vieux chiffres de l'histoire. © G. Iffrah.

angles) ? Pour le comprendre, il faut remonter aux premiers pas de l'astronomie et de l'élaboration des calendriers, à l'époque où les Mésopotamiens, qui comptaient en base 60, mesuraient le temps grâce au mouvement angulaire des astres. La base 60 tisse donc un lien immémorial entre le corps de l'Homme, le temps et l'espace.

L'invention de l'écriture, des nombres aux chiffres

VERS LE NOMBRE PUR

C'est en passant par la cartographie corporelle des nombres que l'Homme est parvenu peu à peu au concept de nombre pur. Qu'y a-t-il de commun entre cinq bisons et cinq arbres ? Réponse : cinq. Cinq, comme tous les nombres, est le résultat d'un processus d'abstraction de la pensée, qui supprime la distinction entre des objets de nature différente. Ce concept de nombre pur a rendu possible la prise de conscience de l'ordre et de la succession des nombres, indépendamment de la nature des objets considérés.

Une nouvelle étape allait encore être franchie avec l'apparition de l'écriture. À l'époque où les hommes vivaient de la cueillette et de la chasse, ils devaient sans cesse se déplacer pour survivre. Avec l'avènement de l'agriculture et de l'élevage, ils se sédentarisèrent et leur nombre s'accroît. Ils s'organisent en villages, puis en villes. Afin de faciliter la vie collective, les hommes vont alors inventer deux choses qui révolutionneront l'histoire de l'humanité : 1) les chiffres, qui permettent de garder une trace des échanges commerciaux ; 2) l'écriture, qui permet de fixer les lois et de faire voyager la pensée dans l'espace et le temps. Fait remarquable, ces deux inventions fondamentales apparaissent de façon quasi simultanée, il y a plus de 5 000 ans, au même endroit : en Mésopotamie, entre le Tigre et l'Euphrate, c'est-à-dire dans l'actuel Irak.

Pour garder une trace de leurs transactions, les Sumériens ont eu l'idée d'utiliser des petits jetons d'argile de formes différentes (fig. 3). Ils étaient le support d'une numération figurée. Une fois connues les valeurs associées à chaque jeton, leur manipulation rendait le calcul aisé, visuel et surtout dynamique. Néanmoins, le système présentait un inconvénient : il ne permettait ni la vérification *a posteriori*, ni la localisation d'erreurs potentielles, car chaque étape de calcul supprimait les précédentes. Impossible donc de garder l'historique des opérations.

Ailleurs, ce sont de petits cailloux que les hommes ont utilisés pour calculer. Le mot « calcul » vient d'ailleurs du latin *calculus*, qui signifie « petit caillou ». Seul le vocabulaire médical a conservé cette signification première du mot « calcul ».

À l'époque, si un berger emmenait paître les 223 moutons qu'un riche éleveur lui avait confiés, on enfermait 3 grands cônes (correspondant à $3 \times 60 = 180$ moutons), 4 petites billes (correspondant à $4 \times 10 = 40$ moutons) et 3 petits cônes (correspondant à 3 moutons) dans une bulle d'argile creuse : $223 = 3 \times 60 + 4 \times 10 + 3$. Un sceau cylindrique, sorte de cachet personnel, était appliqué ensuite sur la bulle : il tenait lieu de signature officielle et son intégrité garantissait que la bulle n'avait jamais été rouverte. Au retour du berger, il suffisait de briser la bulle pour vérifier que le troupeau était au complet.

LES PLUS VIEUX CHIFFRES DE L'HISTOIRE

Vers 3 300 av. J.-C., on s'est rendu compte que ce système n'était guère pratique, puisqu'il ne permettait pas de contrôle intermédiaire : il fallait casser la bulle chaque fois que l'on souhaitait vérifier la quantité enfermée. Les Sumériens ont eu alors l'idée de graver à la surface de la bulle d'argile des marques de formes différentes, chacune correspondant à un *calculus* enfermé à l'intérieur. Ces marques constituaient donc une sorte de résumé symbolique du contenu de la bulle (fig. 4).



Figure 5. Tablette administrative en argile datant de 2 600 à 2 500 ans av. J.-C. © Ashmolean Museum / University of Oxford.

Dès lors, il n'a plus été nécessaire de briser systématiquement la bulle, puisqu'il suffisait de lire les marques inscrites dessus. Ces marques apparaissent donc comme les plus vieux chiffres de l'histoire. Avec ces petits signes gravés, les Sumériens passent d'une numération *figurée* à une numération *écrite*.

Progressivement, une prise de conscience s'opère parmi les comptables mésopotamiens : à quoi bon enfermer des jetons dans une bulle, puisqu'il suffit de lire le résumé gravé dessus ? Ainsi, les bulles ont été peu à peu remplacées par de simples tablettes d'argile, laissant davantage de place aux signes numériques. D'abord de forme grossièrement arrondie, ces tablettes prennent graduellement des formes plus rectangulaires et

deviennent le support d'une véritable comptabilité écrite. Les quantités sont associées à des pictogrammes symbolisant la nature des marchandises troquées.

C'est ainsi qu'apparaît progressivement une véritable écriture cunéiforme, qui ne cessera d'être perfectionnée. De cette époque nous restent des tablettes d'argile (fig. 5), qui témoignent des échanges administratifs ou commerciaux entre paysans, bergers, marchands...

L'alphabet des nombres

Après avoir élaboré des systèmes de numération figurée (*calculi*), les hommes vont développer peu à peu des numérations écrites. Un système de numération écrite

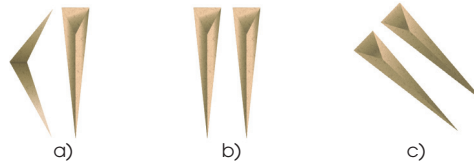


Figure 6. a) Les deux chiffres babyloniens : le chevron et le clou. b) La notation babylonienne était ambiguë : deux clous pouvaient, par exemple, signifier $2 = 1 + 1$ ou $61 = 1 \times 60 + 1$, ou même $3\ 601 = 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 1$. c) Le zéro babylonien sert à marquer l'absence d'unités d'un certain ordre dans l'écriture des nombres. Il n'est pas encore synonyme de quantité nulle. © Palais de la découverte.

a pour fonction première de représenter efficacement les nombres à partir d'un nombre limité de symboles : les chiffres. De même que les lettres de l'alphabet servent à composer des mots, les chiffres sont les briques élémentaires qui permettent de représenter les nombres. Ainsi, 8 est à la fois un chiffre et un nombre à un seul chiffre – tout comme a est à la fois une lettre et un mot d'une seule lettre. En outre, un système de numération doit rendre les calculs aussi aisés que possible.

LES CHIFFRES À BABYLONE

Dans la plupart des systèmes de numération (égyptien, grec, hébraïque), les chiffres avaient une valeur fixe, indépendante de leur place dans l'écriture d'un nombre. Par exemple, dans le système romain, le symbole V signifiait toujours 5, où qu'il fût écrit. L'ingéniosité du système babylonien tient au fait qu'il est positionnel, c'est-à-dire que la valeur d'un chiffre est

déterminée par sa position dans le nombre. Notre système décimal actuel fonctionne toujours selon ce principe. Ainsi, dans le nombre 121, les deux « 1 » n'ont pas la même valeur : le premier signifie 100 alors que le dernier signifie 1. Mais contrairement à notre système de numération, celui des Babyloniens n'utilisait que deux symboles pour représenter tous les nombres : le clou et le chevron (fig. 6a).

Selon la place qu'il occupe dans l'écriture du nombre, le clou pouvait symboliser 1, 60, 60^2 ou encore toute autre puissance de la base. De même pour le chevron qui, selon sa place, représentait 10, 10×60 ou 10×60^2 ... Cette ambiguïté était évidemment source de multiples confusions (fig. 6b) : deux clous pouvaient, en effet, signifier soit $2 (1 + 1)$, soit $61 (1 \times 60 + 1)$.

Pour remédier à ce problème, les Babyloniens laissaient un espace plus grand entre deux symboles, quand ils voulaient suggérer que ces derniers n'avaient pas la même valeur. Ainsi, l'espace entre



Il était une fois les mathématiques, un conte scientifique proposé par les médiateurs de la Cité des sciences et de l'industrie.

© CSI / V. Castro.

Il était une fois les mathématiques

Contrairement à ce que peut laisser supposer l'enseignement tel qu'il est dispensé dans notre système éducatif, les mathématiques ne consistent pas en un corpus abstrait, désincarné, aride et figé. Elles sont indissociables des civilisations qui les ont créées et demeurent en perpétuelle évolution. Loin d'être le domaine réservé d'une élite présentant une tournure d'esprit adéquate (la fameuse « bosse des maths »), les mathématiques concernent tout un chacun, car elles s'inscrivent dans les pratiques les plus diverses et sont partie intégrante de la culture de l'humanité, au même titre que l'art ou la philosophie. Il est donc essentiel d'en transmettre l'histoire. Mais comment narrer une telle épopée intellectuelle, si complexe et si particulière ? « Compter », du latin *computare*, a la même étymologie que « conter ». Alors pourquoi ne pas raconter l'histoire des mathématiques, et en particulier celle des nombres, sous la forme d'un conte ? C'est le spectacle original que propose actuellement la Cité des sciences et de l'industrie. Mêlant mathématiques et histoire, image et musique, concepts et légendes, ce conte scientifique invite à revivre la grande aventure des mathématiques, de l'aube de l'humanité à nos jours, à travers plusieurs siècles d'inventions et d'émotions.

les deux clous était plus grand dans le cas de 61 que dans celui de 2. Cependant, cette astuce ne suffisait pas à lever toute équivoque. Le seul moyen de décoder les nombres avec certitude impliquait de connaître le contexte, c'est-à-dire l'ordre de grandeur probable des quantités en jeu.

En réalité, la principale faiblesse du système de numération babylonien résidait ailleurs : dans l'absence de zéro. En effet, le système positionnel rendait indispensable l'existence d'un signe indiquant l'absence d'unité d'un certain ordre. Ce signe – un double clou incliné (fig. 6c) – ne sera inventé qu'au III^e siècle avant notre ère. Il n'aura, cependant, pas encore le sens de « quantité nulle », contrairement à notre zéro actuel. Les civilisations mayas et chinoises, confrontées au même problème, inventeront, elles aussi, un protozéro.

Dix symboles pour chiffrer/déchiffrer le monde

C'est à la civilisation indienne que nous devons notre système de numération moderne : le système décimal de position comportant dix chiffres, dont un zéro opérateur signifiant simultanément « l'absence d'unité d'un certain ordre » et « la quantité nulle ». Dans ce système, fonctionnant lui aussi de façon positionnelle, chaque chiffre s'écrit avec un symbole bien défini, dont la graphie est indépendante de la valeur du chiffre. On peut représenter ainsi sans ambiguïté tous les nombres imaginables à l'aide de seulement dix symboles.

C'est par l'intermédiaire de la civilisation arabe – Moyen-Orient, Maghreb, Andalousie – que ce système de numération (apparu pour la première fois au V^e siècle en Inde) est parvenu en Occident chrétien au XIII^e siècle. Raison pour laquelle nous continuons d'appeler nos chiffres « chiffres arabes ».

Cette grande aventure des chiffres ne s'arrête pas là et un volume entier ne suffirait pas à retracer tous les méandres de cette fabuleuse histoire – vous pouvez,

Nicolas Ngo

Après l'obtention du CAPES de mathématiques et du premier prix de musique au conservatoire de Lyon, Nicolas Ngo a enseigné les mathématiques pendant 4 ans, avant d'intégrer la Cité des sciences et de l'industrie (CSI) en qualité de médiateur scientifique. En 2011, il a dirigé la création du spectacle intitulé *Il était une fois les mathématiques* (actuellement présenté à la CSI) qui retrace, sous la forme originale d'un conte, la grande aventure des nombres, de leur invention à aujourd'hui.

toutefois, en avoir un aperçu à la Cité des sciences et de l'industrie (encadré *Il était une fois les mathématiques*). Cependant, notre façon de noter les nombres n'a que peu évolué depuis cette époque : le système indo-arabe représente, en somme, un tout achevé. Au-delà d'une simple notation, cet acquis va fournir un outil conceptuel permettant une meilleure compréhension de la notion même de nombre dans toute la complexité qu'elle peut revêtir. De nouvelles familles de nombres vont venir progressivement accroître les connaissances et ouvrir de nouveaux champs dans la recherche mathématique. Qu'ils soient irrationnels, négatifs, réels, imaginaires ou transcendants, les nombres continuent d'irriguer de nombreux domaines de l'activité humaine. Ils ont permis d'unifier des concepts mathématiques qui semblaient jusque-là sans rapport, d'édifier des théories plus générales et même de penser l'infini. **N. N.**

Pour en savoir plus

Dehaene S., « Les fondements cognitifs de l'arithmétique élémentaire », in *Cours de psychologie cognitive expérimentale du Collège de France*, 2007-2008, http://www.college-de-france.fr/media/psy_cog/UPL22033_dehaene_res0708.pdf

Godefroy G., *L'Aventure des nombres*, Paris, Odile Jacob, 1997.

Guedj D., *L'Empire des nombres*, Paris, Gallimard, 1996.

Ifrah G., *Histoire universelle des chiffres*, Paris, Robert Laffont, 1994.

Exposé *Nombres et opérations* au Palais de la découverte.