Mosaïque de la dissection d'Abu'l-Wafa' pour prouver le théorème de Pythagore. Iwan ouest de la mosquée du Vendredi à Ispahan (Iran).

Formes mathématiques
De l'art de couper les carrés en cinq

Dans le numéro précédent (*Découverte* n° 378, janvier-février 2012, p. 46-51), nous vous avons montré comment découper un carré en trois carrés identiques. Cette fois-ci, il s'agit de le diviser en cinq. À ce problème, le mathématicien Abu'l-Wafa' proposa une solution d'une grande richesse, notamment parce qu'elle permet en fait de découper un carré en un nombre quelconque de carrés identiques ! De plus, Abu'l-Wafa' utilisa sa dissection pour illustrer le fameux théorème de Pythagore. Elle méritait donc bien un article à part entière…

PAR **CHRISTIAN BLANVILLAIN**, INGÉNIEUR INFORMATICIEN DIPLÔMÉ DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Comment découperiez-vous un carré en cinq carrés identiques ? C'est-à-dire, comment le diviseriez-vous en plusieurs petits morceaux, de tailles et de formes non forcément identiques mais qui, correctement réassemblés, constitueront cinq carrés ayant chacun la même aire ? La figure 1 présente la solution proposée par le mathématicien perse Abu'l-Wafa' (940-998) dans son ouvrage intitulé *Constructions géométriques à l'usage des artisans*. Sur le premier dessin, en plus du carré central beige, vous obtenez quatre autres carrés en réunissant les deux pièces vertes, les deux bleu clair, les deux bleu foncé et les deux marrons. Les dessins ß et γ sont des variations de la dissection α, dans lesquelles les pièces sont colorées différemment. Elles nous serviront par la suite.

POURQUOI ÇA MARCHE ?

Pour justifier le premier découpage de la figure 1, Abu'l-Wafa' proposa la construction suivante (fig. 2) : dans un carré divisé en neuf carrés identiques, nous obtenons un carré scindé en cinq en traçant quatre diagonales de rectangles formés par

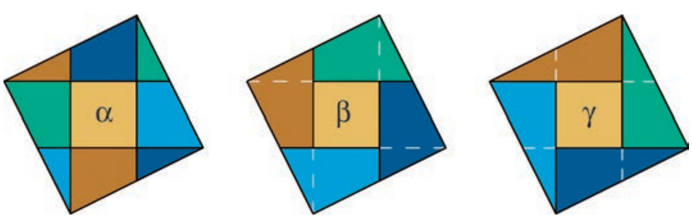


Figure 1. Variations autour de la dissection du carré en cinq carrés identiques d'Abu'l-Wafa' (Xe siècle).

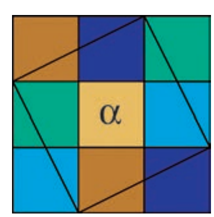


Figure 2. Illustration de la preuve de la dissection du carré en cinq carrés identiques d'Abu'l-Wafa' (Xe siècle).

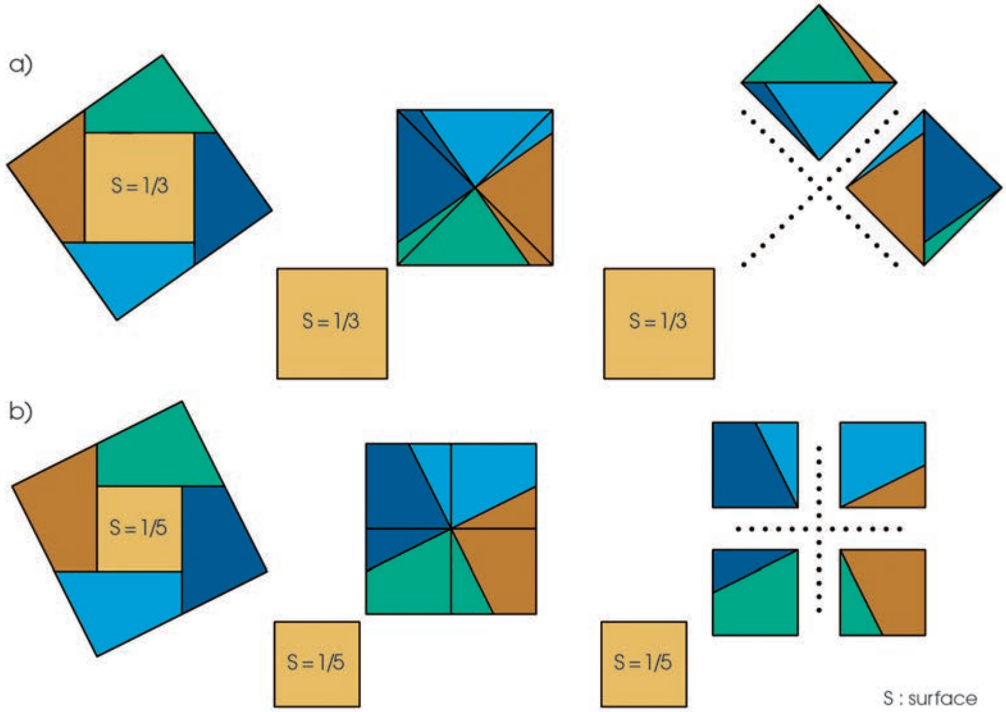


Figure 3. **Technique de la trisection (a) adaptée au découpage du carré en cinq (b).** © C. Blanvillain.

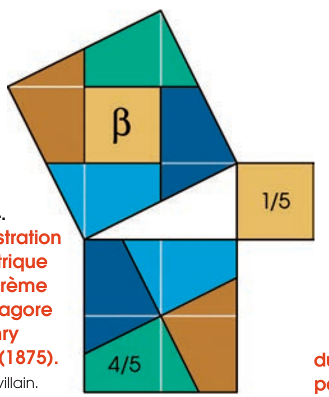


Figure 4. **Démonstration géométrique du théorème de Pythagore par Henry Perigal (1875).** © C. Blanvillain.

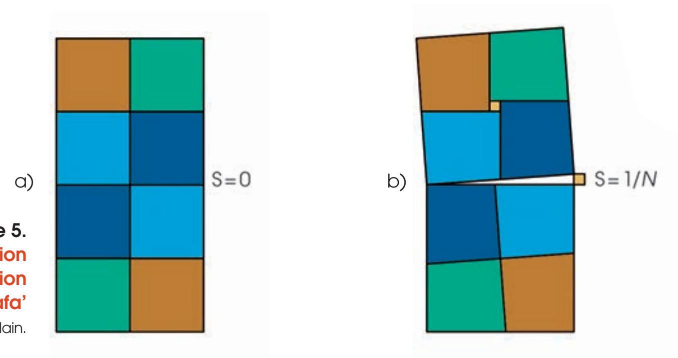


Figure 5. **Généralisation de la trisection du carré d'Abu'l-Wafa' par Perigal.** © C. Blanvillain.

deux carrés périphériques accolés, et retrouvons ainsi la dissection de la figure 1.

La variation ß de la dissection d'Abu'l-Wafa' (fig. 1, deuxième dessin) utilise la même technique que celle de la trisection du carré présentée dans les *Formes mathématiques* du n° 378 (fig. 3a), mais avec un carré central plus petit (fig. 3b). Ici, le carré central (en beige) fait 1/5 de l'aire totale, au lieu de 1/3 pour la trisection. Les quatre pièces qui l'entourent peuvent être assemblées en un carré d'aire 4/5 au lieu de 2/3, qui sera coupé en quatre au lieu d'être divisé en deux. Au final, nous obtenons bien un découpage du carré en cinq carrés identiques au lieu de trois.

LA GÉNÉRALISATION GÉNIALE D'HENRY PERIGAL

Henry Perigal (1801-1898), mathématicien amateur, a redécouvert la dissection d'Abu'l-Wafa' vers 1835, mais ne l'a publiée qu'en 1875. Sa remarquable contribution a été de proposer cette dissection comme preuve géométrique du théorème de Pythagore. Il suffit, en effet, de disposer les trois premiers éléments de la figure 3b selon les côtés d'un triangle rectangle (fig. 4) pour retrouver la configuration du fameux théorème (encadré *Le théorème de Pythagore ne manque pas d'aires*).

Perigal a constaté que, quelle que soit la taille du triangle rectangle central de la figure 4, la dissection fonctionne systématiquement (fig. 5). Autre-

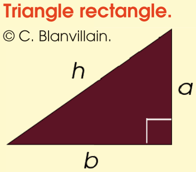


Figure I. Triangle rectangle.
© C. Blanvillain.

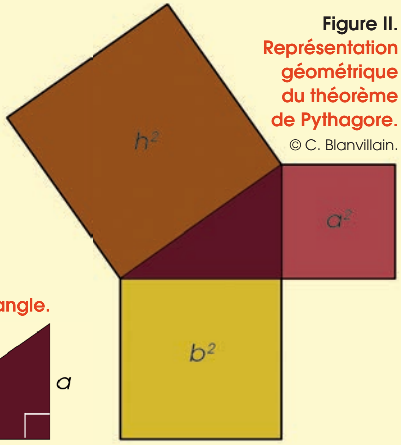
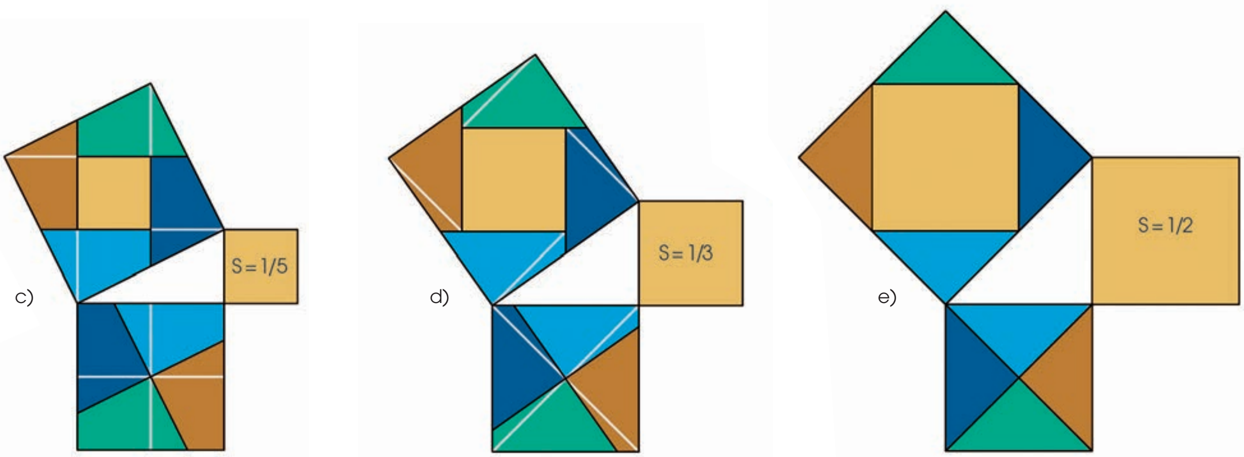


Figure II. Représentation géométrique du théorème de Pythagore.
© C. Blanvillain.

Le théorème de Pythagore ne manque pas d'aires

Le théorème de Pythagore exprime la relation qui existe entre les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle : l'hypoténuse *h* et les deux côtés *a* et *b* de l'angle droit (fig. I). Il s'exprime ainsi : « le carré de l'hypoténuse *h* est égal à la somme des carrés des côtés *a* et *b* opposés ». Ce qui donne : $h^2 = a^2 + b^2$. Si nous dessinons un carré sur chacun des côtés d'un triangle rectangle (fig. II), le théorème de Pythagore peut être interprété alors de manière géométrique : l'aire h^2 du carré marron de côté h est égale à la somme des aires a^2 et b^2 des deux carrés rouge et jaune de côtés respectifs a et b. La dissection d'Abu'l-Wafa' généralisée par Perigal permet de vérifier cette relation par découpage.



ment dit, nous pouvons toujours découper le carré, formé à partir de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, en pièces permettant de reconstituer les deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Il était tellement fier de ce résultat qu'il a souhaité qu'il soit gravé sur sa tombe !

DES CARRÉS À VOLONTÉ !

Attardons-nous un peu sur ce résultat et observons plus finement ce qui se passe quand la taille du triangle rectangle, et donc celle du carré beige, varient (fig. 5) : certaines valeurs particulières de l'aire du carré beige permettent de retrouver des dissections présentées dans les *Formes mathématiques* du n° 378 ! Par exemple, en réduisant l'aire du carré beige à 0, nous retrouvons comment découper un carré en quatre (fig. 5a). Si nous agrandissons la surface du carré beige jusqu'à ce qu'il occupe exactement la moitié de la surface du grand, nous obtenons cette fois-ci une solution pour découper un carré en deux (fig. 5e). Enfin, si son aire est égale à 1/3 de l'aire du grand carré (fig. 5d), nous retrouvons la trisection du carré d'Abu'l-Wafa'.

Plus généralement, cette dissection permet de découper un carré en un nombre entier N quelconque de carrés identiques ! Il suffit, en effet, de supprimer un carré de surface $1/N$ au centre (fig. 5b) et de réassembler les quatre morceaux restants en

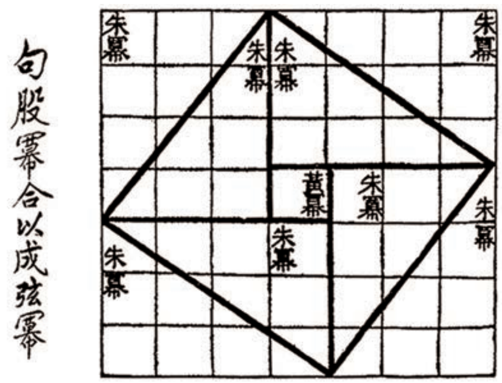
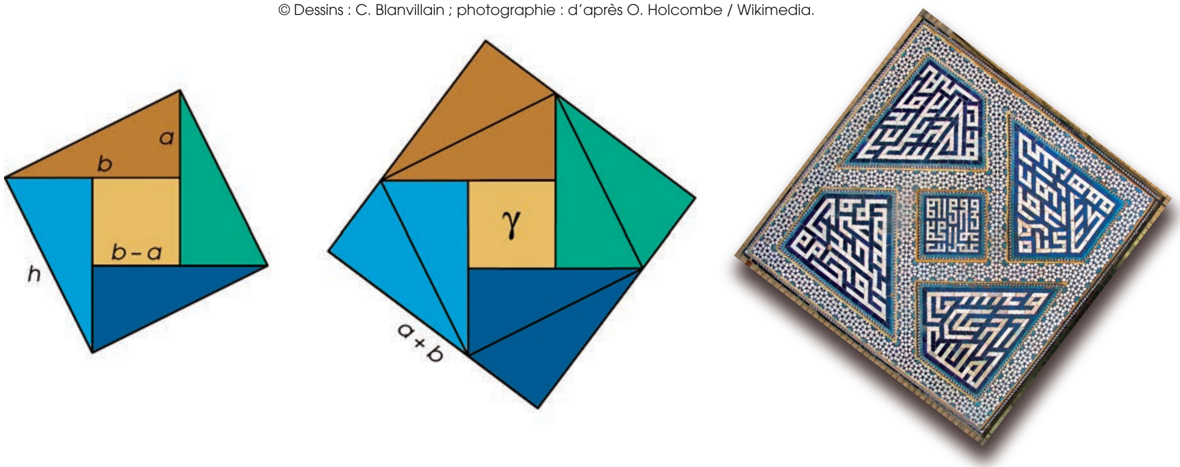


Figure 6.
Gnomon de Zhou, extrait de l'un des plus vieux textes de mathématique chinoise : *Zhou Bi Suan Jing*. © J. Needham / Wikimedia.

Figure 7.
Enrichissement par Abu'l-Wafa' de sa dissection du carré en cinq carrés identiques.
© Dessins : C. Blanvillain ; photographie : d'après O. Holcombe / Wikimedia.



un carré de surface $N - 1/N$. Ensuite, nous n'avons plus qu'à réitérer le processus sur ce nouveau carré, et cela N fois. Cette méthode répétitive n'est certes pas très pratique, mais en utilisant cette idée de manière un peu plus astucieuse, nous pouvons, par exemple, scinder en seulement trois étapes un carré en sept carrés identiques… Nous laissons au lecteur le soin d'y réfléchir (indice : 7 = 4 + 3).

ABU'L-WAFA' ET LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

La variation γ de la figure 1 pour la dissection d'un carré en cinq carrés identiques permet, elle aussi, de démontrer le théorème de Pythagore. Notons d'ailleurs que l'on retrouve cette figure à l'intérieur de l'une des plus anciennes preuves connues de ce théorème (fig. 6).

Ce découpage est constitué d'un carré central entouré de quatre triangles rectangles, dont nous nommons h l'hypoténuse, a la longueur du petit côté de l'angle droit et b la longueur du grand côté de l'angle droit (fig. 7). Pour démontrer le théorème de Pythagore, Abu'l-Wafa' enrichit sa dissection en ajoutant aux quatre triangles rectangles leur symétrique par rapport à leur hypoténuse. Il forma ainsi un polygone dont l'on pourrait démontrer qu'il s'agit d'un carré. Le côté de ce grand carré a pour longueur $a + b$ et son aire est $(a + b)^2$.
Sur les figures 8a et 8c, nous voyons que l'aire $(a + b)^2$ du grand carré est égale à la somme des aires des quatre triangles rectangles qui ont été ajoutés, plus l'aire h^2 du carré de départ. Assemblons ces quatre triangles rectangles deux à deux selon leur hypoténuse pour former deux rectangles, que nous complé-

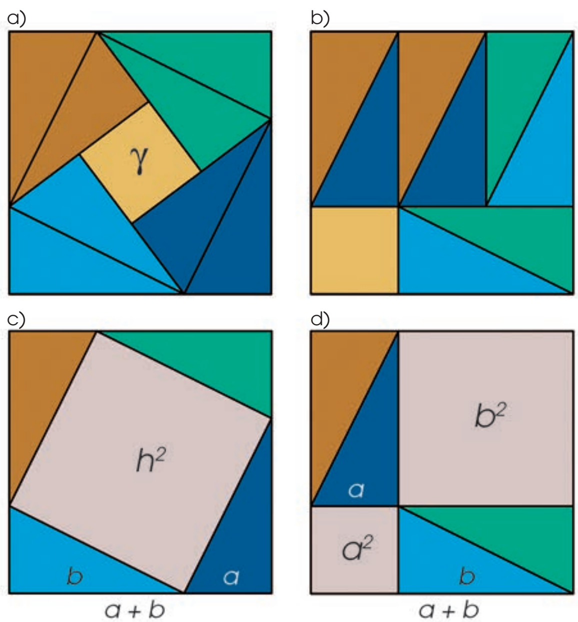


Figure 8.
Illustration de la preuve du théorème de Pythagore par Abu'l-Wafa' (X[e] siècle).
© C. Blanvillain.

tons par deux carrés de surfaces respectives a^2 et b^2 dans les figures 8b et 8d. Nous obtenons alors un polygone dont l'on pourrait démontrer qu'il s'agit d'un carré. Son aire $(a + b)^2$ est égale à la somme des aires des quatre triangles rectangles, plus les aires a^2 et b^2. Ainsi, en comparant les figures 8c et 8d et en éliminant les aires des quatre triangles rectangles communes à ces deux dessins, nous obtenons bien $h^2 = a^2 + b^2$, c'est-à-dire que le carré de côté h a la même aire que la somme des aires des carrés de côtés a et b. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cette démonstration sera choisie par Abu'l-Wafa' pour expliquer le théorème de Pythagore aux artisans. Ces derniers l'apprécièrent considérablement, tant pour son aspect didactique que pour sa valeur ornementale, et décidèrent de mettre à l'honneur le motif obtenu (fig. 7) en de multiples lieux de la grande mosquée d'Ispahan en Iran (appelée également mosquée du Vendredi – photographie p. 40).

L'ART DE LA DÉMONSTRATION

Les illustrations de cet article (et celles du précédent) constituent une excellente base pédagogique pour présenter les solutions au problème du découpage du carré en 2, 3, 4, 5, …, N carrés identiques, ainsi que pour introduire le théorème de Pythagore de manière géométrique. Par souci de simplicité, nous les avons exposées sans démonstration formelle. Cependant, l'expérience nous a montré qu'en mathématiques, il ne faut pas se fier uniquement à ce que l'on voit, car il arrive parfois que l'erreur soit si infime qu'elle reste invisible, même pour un œil averti. Le géomètre saura refaire facilement le cheminement intellectuel pour se convaincre de leur justesse, mais pour les autres, cet exercice peut se révéler parfois difficile.

Lorsque les outils mathématiques nécessaires pour vérifier l'exactitude de ces solutions sont trop complexes pour être expliqués aux plus jeunes, un substitut intéressant est l'utilisation d'un vrai puzzle. Ce faisant, on combine l'approche visuelle avec l'aspect ludique d'un objet physique manipulable, ce qui rend la beauté intrinsèque de ces mathématiques accessible à tous et à toutes ! **C. B.**

Pour en savoir plus

Perigal H., *Geometric Dissections and Transpositions,* 1891. Le texte d'introduction est en anglais. Le livre contient de nombreuses illustrations données sans commentaire.
> http://en.wikisource.org/wiki/Geometric_Dissections_and_Transpositions

Woepcke M. F., « Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Abu'l-Wafa' », in *Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans,* 1855. Cette partie de l'ouvrage offre une traduction du chapitre XI du *Traité des constructions géométriques* d'Abu'l-Wafa' : « De la division des carrés en un certain nombre de carrés, et de la composition d'un carré au moyen d'un certain nombre de carrés ».
> http://visualiseur.bnf.fr/ark:/12148/cb34348774p/date1855