Formes mathématiques
Vive la loi de Gauss !

C'est plus ou moins ce que l'on pouvait lire sur les banderoles de manifestants russes, en décembre dernier. Le slogan était accompagné de courbes, certainement obscures pour le profane. Nous vous proposons ici une explication du phénomène mathématique qu'est la courbe de Gauss.

PAR **ROBIN JAMET**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE DE L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

La courbe de Gauss, utile jusque dans les manifestations ! (Ici en Russie en décembre dernier, lors des élections législatives.)
© N. Komarov.

La courbe de Gauss – du mathématicien Carl Friedrich Gauss (1777-1855), figure 1 – est une véritable « star » en mathématiques, mais aussi dans de nombreuses autres disciplines scientifiques. Et pour cause : on la croise tous les jours, plus ou moins consciemment. Si vous étudiez, par exemple, la taille des Français, les notes au baccalauréat, ou encore les précipitations des 100 dernières années en Basse-Normandie, vous aurez affaire à elle. La répartition des données recueillies peut sembler intuitive : autour d'une valeur moyenne, entre individus distincts, d'une année sur l'autre, on observe des fluctuations. La plupart des valeurs de la variable considérée se trouvent à proximité de la moyenne, quelques-unes s'en éloignent. Mais pourquoi visualise-t-on précisément une courbe en forme de cloche ?

Figure 1. Carl Friedrich Gauss, mathématicien, astronome et physicien allemand (1777-1855).

LA PLANCHE DE GALTON

Pour comprendre d'où vient cette répartition, le plus simple est de se référer à la fameuse « planche de Galton » (fig. 2). Il s'agit d'une simple planche à clous. Ces derniers sont plantés régulièrement, de manière à ce qu'une bille lâchée du haut du dispositif rencontre à chaque étage un clou, avec exactement autant de chances de passer à sa droite qu'à sa gauche (encadré *La « planche de Hennequin »*). Au bas de la planche, des cases permettent de récupérer les billes.

La question est la suivante : si vous lancez de nombreuses billes du haut de la planche, comment vont-elles se répartir en bas ? En général, les réponses des profanes sont multiples : les billes vont se distribuer de façon à peu près égale dans toutes les cases ;

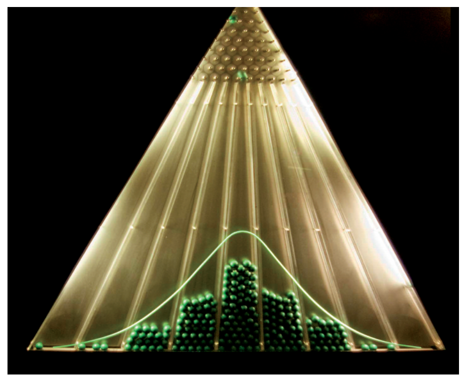

Figure 2. La planche de Galton.

La « planche de Hennequin »

L'expérience avec une planche à clous ne correspond pas tout à fait à la modélisation qui en est faite. En effet, quand une bille passe d'un côté d'un clou, elle acquiert une vitesse latérale qui augmente sa probabilité de passer du même côté du clou suivant. Ce phénomène physique a tendance donc à défavoriser les cases centrales, et par conséquent à « aplatir » la répartition obtenue. Pour remédier à ce problème, Paul-Louis Hennequin, un mathématicien, a imaginé une planche améliorée : au lieu de disposer des clous, on place des hexagones sur la planche, en ménageant des couloirs entre eux, idéalement de la taille d'une bille (fig.). Ainsi, au sommet de chaque hexagone, une bille a réellement une chance sur deux de tomber d'un côté ou de l'autre, et sa vitesse latérale est remise à zéro dans le couloir vertical qu'elle emprunte avant d'atteindre le prochain hexagone…

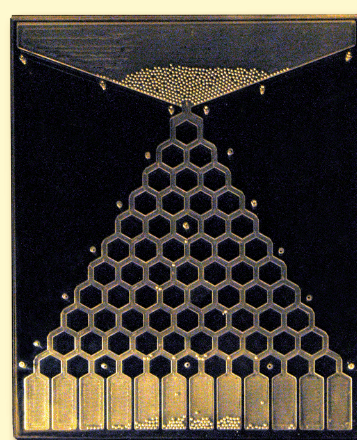

Figure. Planche de Galton revue et corrigée par Paul-Louis Hennequin.

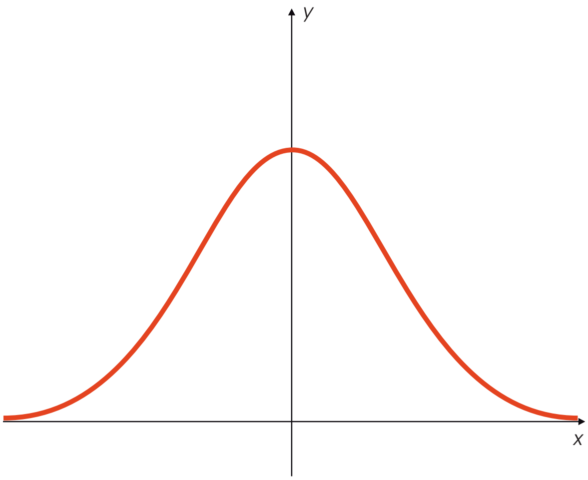

Figure 3. Courbe de Gauss. © Palais de la découverte / G. Reuiller.

il y en aura plus au centre ; plus sur les côtés ; on ne peut rien dire : c'est le hasard, ça change à chaque fois… Vous remarquerez par vous-même sur la figure 2 (réalisée sans trucage !) que le constat est sans appel : une belle bosse apparaît. Bien sûr, le résultat sera différent d'une fois sur l'autre, mais la forme générale de cloche sera conservée systématiquement. Pourquoi ce profil ? Comptez le nombre de chemins distincts qui mènent à chacune des cases en bas de la planche. Pour accéder à la case de l'extrémité gauche, par exemple, il n'y en a qu'un seul : celui qui passe toujours à gauche des clous rencontrés. Pour arriver dans la case qui se trouve un cran à droite, on recense plusieurs trajets potentiels : une bille tombée dans cette case est passée à gauche de tous les clous qu'elle a croisés, sauf une fois. Mais cette unique occurrence peut se trouver au premier étage, au deuxième, ou au troisième… Bref, il existe autant de chemins conduisant à cette case que d'étages à la planche. Case suivante : on a intercalé deux virages à droite parmi des virages à gauche. Ceux-là peuvent se suivre ou non, être en haut de la planche, en bas… On a augmenté donc encore le nombre d'itinéraires. Et ainsi de suite.

Bien évidemment, le raisonnement est symétrique : il y a autant de chemins qui mènent à chacune des deux cases situées à égale distance du bord de l'un ou l'autre des côtés de la planche. Puisque l'on suppose que la trajectoire de la bille est le fruit du hasard, chaque chemin a la même probabilité que les autres d'être emprunté. Une bille a, par conséquent, beaucoup plus de chances de tomber au milieu que sur les côtés. Ainsi, on visualisera inéluctablement des « marches », qui descendent de part et d'autre de la (ou des) case(s) centrale(s). Plus vous rajouterez d'étages et de billes, moins vous distinguerez ces marches. La courbe de Gauss (fig. 3) est la limite de ce processus : il faut imaginer, dans la mesure du possible, une planche avec une infinité d'étages, du haut de laquelle on jetterait une infinité de billes…

LA CLOCHE A PRIS UN COUP

Voilà donc pourquoi on rencontre cette courbe partout : une telle répartition de population signifie, en gros, qu'elle résulte d'une série de hasards successifs ; chaque individu se trouve dans une case du fait du chemin parcouru et de tous les antécédents qui le caractérisent. La taille, par exemple, découle de la combinaison d'un mélange de gènes et de conditions de vie depuis des générations ; les notes dépendent des « choix » de chacun des élèves au cours de leur vie et de leurs « capacités »… Même s'il n'est pas toujours évident (voire faisable) de déterminer précisément en quoi consistent ces causes, il demeure

Figure 4. Les courbes représentent le nombre de bureaux de vote ayant un taux de participation donné. En marron, celle des élections russes de décembre dernier. © N. Komarov.

naturel d'observer cette distribution… et de s'interroger sur l'origine possible d'une répartition différente.

Il est temps, à présent, de rejoindre les manifestants russes ! Les courbes exhibées sur la banderole de la figure 4 représentent la quantité de bureaux de vote correspondants par taux de participation dans divers pays ; la courbe marron représente les élections russes. On pourrait s'attendre à une courbe assez proche de celle de Gauss : les éléments qui font varier le taux de participation d'un bureau de vote à un autre sont divers, nombreux, complexes. On ne contemplera pas obligatoirement la courbe de Gauss, mais au moins une courbe en cloche, avec éventuellement quelques particularités, comme la présence d'une surabondance de taux de participation de 100 % liée à l'existence de bureaux de vote très petits. C'est effectivement ce que l'on constate sur les courbes illustrant ces participations dans d'autres pays. La forme parfaitement aberrante de la courbe marron affichée sur la banderole atteste que le système est corrompu au royaume de Russie… Difficile de prouver que c'est en faveur de tel ou tel candidat, mais l'on peut affirmer en tout cas qu'il y a eu fraude, plus précisément un bourrage d'urnes. Ce dernier étant corroboré par l'apparition de « pics » pour les comptes ronds, de 5 en 5 à partir de 50 %, qui donnent l'impression d'être la conséquence de participations prédéfinies à atteindre (la consigne suivante a pu être donnée : « bourrez l'urne, mais sans dépasser les 80 % de participation, cela serait trop voyant »).

À défaut de mettre en cause directement les responsables, cette observation permet de mettre au jour ouvertement un dysfonctionnement grave… Mais, les arguments mathématiques sont-ils efficaces dans un débat politique ? **R. J.**