Formes mathématiques

Un pavage sans fautes

Le pavage du plan le plus courant est probablement le pavage par des carrés. Il sert fréquemment à élaborer les motifs des carrelages. Il y a peu à dire sur ce type de pavage. Avec des dominos, deux fois plus longs que larges, l'exercice devient beaucoup plus intéressant, car on peut positionner chaque pièce verticalement ou horizontalement et obtenir ainsi un grand nombre de pavages différents.

PAR **ANTOINE HINGE**, UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Facile, certes, mais on peut rendre rapidement le problème plus ardu : est-il envisageable, par exemple, de paver un rectangle avec des dominos sans qu'il y ait de ligne droite ininterrompue découpant le rectangle en deux autres plus petits ? On peut trouver aisément des solutions ; l'une d'elle est représentée sur la figure 1 : le pavage d'un rectangle de côtés 6 et 10 (que l'on notera par la suite « rectangle 6*10 »).
On s'aperçoit vite que dans le cas de rectangles trop petits, en revanche, la tâche se révèle impossible (fig. 2). Quelle est donc la plus petite surface pour laquelle on peut réaliser ce pavage ? Quels sont les rectangles pouvant ou non être pavés avec cette contrainte ?
La surface à paver peut être considérée comme un quadrillage à remplir avec des dominos, les lignes à l'intérieur du quadrillage étant celles susceptibles de couper la surface en deux (fig. 3). Pour que le pavage soit compatible avec la règle imposée, chacune des lignes en pointillés doit traverser au moins un domino. Vous pouvez essayer de trouver une solution avec des dominos, ou plus simplement à l'aide d'un crayon et de papier quadrillé.

QUELQUES SITUATIONS IMPOSSIBLES

D'entrée de jeu, on élimine plusieurs rectangles qui ne peuvent être pavés en respectant la règle initiale. Par exemple, un rectangle ayant ses deux côtés impairs ne peut être recouvert par des dominos occupant eux-mêmes un nombre pair de cases (le produit de deux nombres impairs étant impair). Pour certaines configurations, une solution peut être trouvée sans trop de peine.

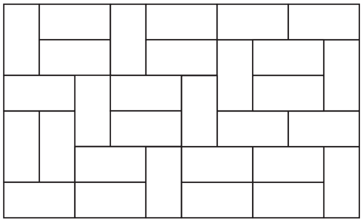

Figure 1. Problème résolu pour un rectangle de côtés 6 et 10. © A. Hinge.

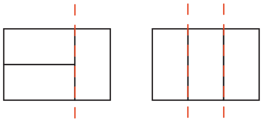

Figure 2. Pour le rectangle 2*3, il n'y a pas de solution au problème posé. © A. Hinge.

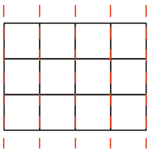

Figure 3. Surface de 4 carrés sur 3 avec ses 5 lignes verticales de coupures possibles. © A. Hinge.


RESTAURANT

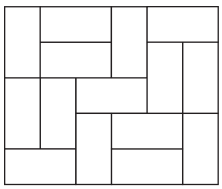

Figure 4. Pavage compatible pour le rectangle 5*6. © A. Hinge.

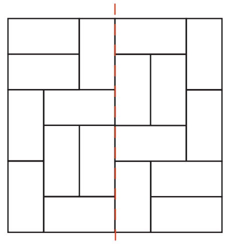

Figure 5. Tentative ratée pour le carré de dimension 6*6 : une ligne permet de le séparer en deux rectangles plus petits. © A. Hinge.

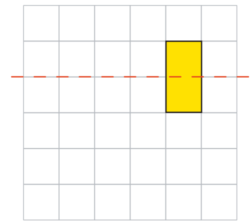

Figure 6. Ligne coupant un seul domino. © A. Hinge.

Le rectangle 5*6 est le plus petit que l'on puisse paver sans qu'aucune ligne sépare le rectangle en deux autres plus petits (fig. 4). Afin de le démontrer, on peut passer en revue tous les rectangles plus petits, exercice fastidieux mais assez rapide au demeurant.
Cependant, il est impossible de résoudre le problème pour le carré 6*6 (fig. 5). Voyons comment le prouver…
Il faut 18 dominos pour paver une telle surface, puisque chaque domino recouvre deux carrés. Tout d'abord, essayez de visualiser la situation suivante : dans un carré de dimension 6*6, chaque ligne du quadrillage croise un nombre pair de dominos. Sur l'exemple de la figure 5, le principe s'applique effectivement : chaque ligne coupe soit zéro (ligne rouge en pointillés) soit deux rectangles. Démontrons que ce sera toujours le cas : supposons qu'une ligne coupe un seul domino, comme l'illustre la figure 6. Il faut paver alors encore la surface située au-dessus de la ligne avec des dominos, qui recouvrent chacun deux cases. Or, il reste un nombre impair de cases libres : on est donc obligé de placer au moins un domino qui chevauche la ligne et, plus précisément, de faire en sorte qu'il y ait un nombre total pair de dominos la chevauchant. Cela fonctionne dans le cas du carré 6*6 car, pour n'importe quelle ligne coupant le carré en deux, le nombre de cases dans l'une ou l'autre des deux surfaces définies est pair. Cette règle est vérifiée bien sûr pour tous les rectangles dont les deux côtés sont pairs.
Pour revenir au problème du carré 6*6, il y a cinq droites horizontales et autant de droites verticales susceptibles de couper le carré en deux. Chacune de ces droites traverse, dans un pavage compatible, au moins deux dominos (si elle n'en coupe aucun, c'est que le pavage n'est pas compatible). Dans ce cas, il faudrait au minimum 20 dominos (10 verticaux et 10 horizontaux) pour paver le carré de façon compatible, or on dispose de 18 dominos seulement. Il n'est donc pas possible de paver le carré de 6*6 avec des dominos de manière compatible.

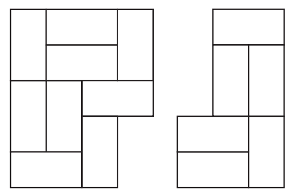

Figure 7. Séparation pour le rectangle 5*6. © A. Hinge.

SOLUTIONS MINIMALES ET EXTENSIONS

En mathématiques, il est fréquent de chercher la solution de problèmes en commençant par les cas simples, dans le but de faciliter la résolution des cas plus complexes. Cette démarche est particulièrement efficace dans notre situation…
On a vu déjà que le plus petit rectangle pour lequel il existe une solution est le 5*6. En se basant sur ce dernier, on peut trouver une solution pour tous les rectangles plus grands qui ont un côté pair et l'autre impair. En effet, à partir d'une solution existante, on peut insérer des dominos tous dans le même sens afin de prolonger le rectangle, dans la direction choisie, de deux unités. Par exemple, on peut allonger le rectangle 5*6 de deux carrés vers la droite : pour cela, on décompose le rectangle en deux figures, entre lesquelles on intercale des

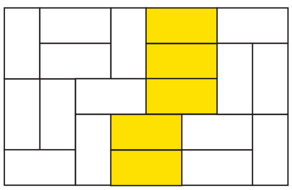

Figure 8. On intercale des dominos tous horizontaux au sein du rectangle 5*6 préalablement divisé. © A. Hinge.

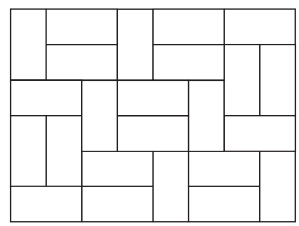

Figure 9. Le rectangle 8*6 peut être pavé de façon à respecter la règle établie au départ. © A. Hinge.

dominos horizontaux. Pour scinder le quadrilatère en deux, il suffit de suivre l'une des lignes internes en contournant les dominos qu'elle vient couper (ceux du haut et du milieu sur l'exemple de la fig. 7). On introduit alors des dominos tous dans le sens opposé à la coupe : si cette dernière est verticale, comme sur la figure 8, on les place horizontalement ; si, au contraire, la coupe est réalisée à l'horizontale, on les dispose à la verticale.
Le résultat est une fois de plus un rectangle compatible avec la règle de pavage : pour la plupart des lignes internes, le pavage n'a pas changé et celles-là ne peuvent pas couper le rectangle en deux. Concernant les deux lignes internes créées par l'ajout de ces rectangles, elles aussi traversent encore des dominos en raison de l'alternance du motif ajouté (en jaune). Si ce n'était pas le cas, le pavage de base ne serait pas compatible.
Et pour les rectangles avec les deux côtés pairs ? On découvre que le plus petit rectangle admettant des solutions est le 8*6. La figure 9 illustre une configuration possible, mais il en existe d'autres. De la même façon, on est assuré de trouver une solution pour tous les rectangles plus grands dont les deux côtés sont pairs. Ainsi, on peut adopter le raisonnement suivant : quel que soit le rectangle que l'on cherche à paver, s'il est assez grand et possède au moins un côté pair, on le compare au rectangle avec lequel il partage la même parité des côtés, puis on accroît ce dernier jusqu'à obtenir la configuration désirée. Il existe donc toujours une solution.

AUTRES CONTRAINTES, AUTRES PAVAGES

Avec cette méthode, on est capable de construire un pavage compatible pour des rectangles ayant au moins un côté pair et des dimensions suffisantes. Le problème se corse si l'on choisit d'imposer deux contraintes supplémentaires : chaque ligne verticale doit couper un nombre constant de dominos, chaque ligne horizontale également (pas nécessairement le même nombre). Cela n'a pas été forcément le cas dans nos exemples (pour le rectangle 6*5, les lignes verticales coupent un ou deux dominos), mais on peut établir une relation simple permettant de savoir s'il est possible ou non de réaliser un tel pavage. **A. H.**

Pour en savoir plus

Atkinson M.D., Lunnon W.F., « Regular fault-free rectangles », *The Mathematical Gazette*, vol. 64, n° 428, 1980, p. 99-106.