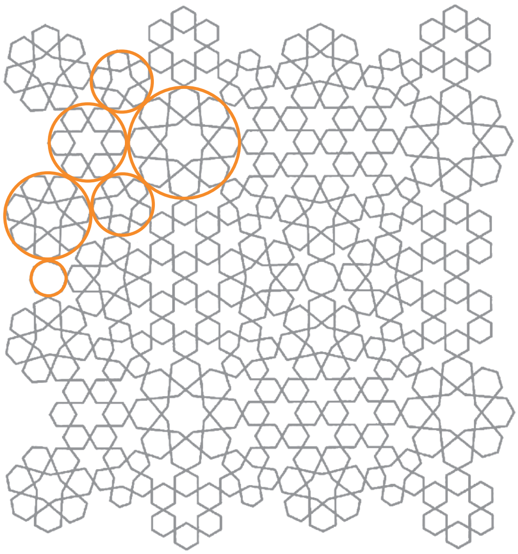
Formes mathématiques
Excentrique(s) mais



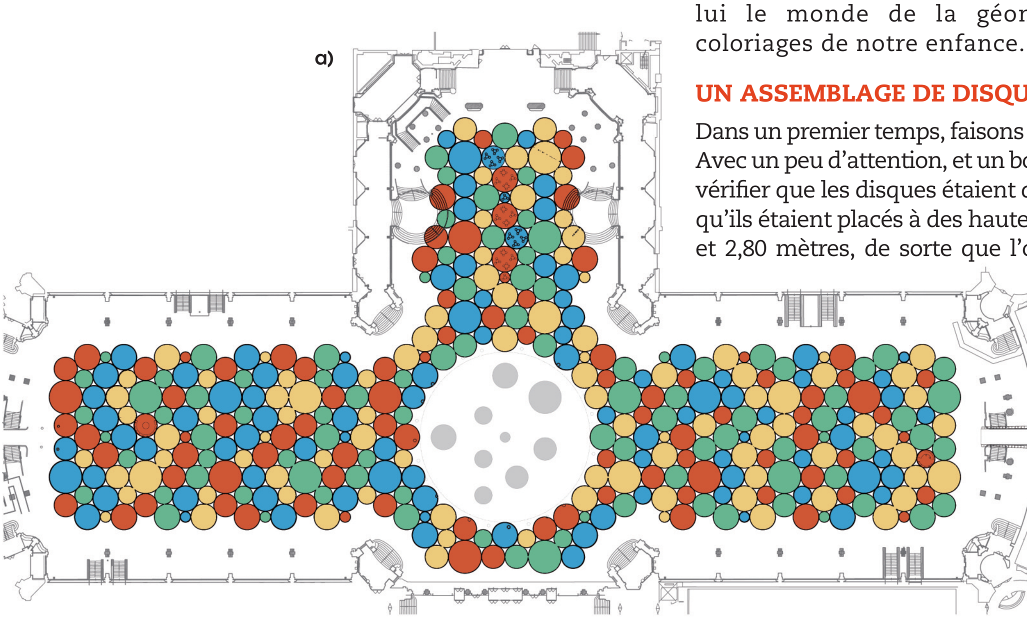
Excentrique(s), travail in situ est une œuvre de Daniel Buren, qui a investi le Grand Palais. Elle consistait en un amusant assemblage de grands disques translucides aux couleurs de bonbons acidulés, supportés par des poteaux régulièrement espacés. Lorsque la lumière du Soleil traversait la verrière de la Grande Nef, ces disques projetaient sur le sol une mosaïque multicolore tout en rondeurs. En se promenant sous cette canopée lumineuse et polychrome, on découvrait des alignements particuliers. Derrière un désordre apparent se cachait en fait une structure régulière, pleine de symétries, inspirée d'un décor andalou millénaire.

PAR **ROMAIN ATTAL**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE DE L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Figure 1. Les cercles d'*Excentrique(s), travail in situ* sont issus d'une fresque andalouse.

Il est rare qu'une œuvre d'art possède des propriétés mathématiques intéressantes et accessibles. Puisque c'était le cas de la dernière œuvre de l'artiste Daniel Buren – *Excentrique(s), travail in situ* – revisitons avec lui le monde de la géométrie plane et des coloriages de notre enfance.

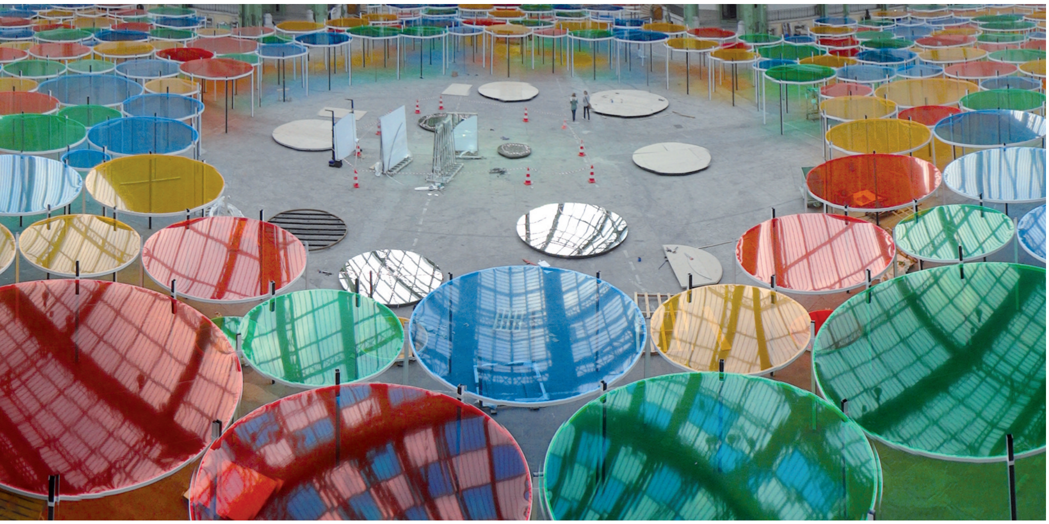
a)



UN ASSEMBLAGE DE DISQUES BIEN RANGÉS

Dans un premier temps, faisons abstraction des couleurs. Avec un peu d'attention, et un bon décamètre, on pouvait vérifier que les disques étaient déclinés en cinq tailles et qu'ils étaient placés à des hauteurs comprises entre 2,50 et 2,80 mètres, de sorte que l'on pouvait se promener

symétrique(s)



Excentrique(s), travail in situ de Daniel Buren a été exposé au Grand Palais du 10 mai au 21 juin 2012. © Construire.

dessous en toute quiétude. Leur projection sur le sol dessinait des cercles tangents. Leur rayon et leur disposition n'avaient pas été pris au hasard, mais choisis en s'inspirant d'un pavage périodique d'un palais de l'Alhambra, construit à Grenade il y a 6 à 10 siècles (fig. 1). Étudions de plus près la projection de ces disques sur le sol en incluant leur bord. On obtient alors le plan de la figure 2a. Daniel Buren les a disposés en tenant compte de la taille et de la géométrie du bâtiment, qui offre une surface au sol de plus de 13 000 m².

SYMÉTRIES CACHÉES

En ôtant les couleurs des disques (fig. 2b), on voit apparaître un empilement de cercles périodique,

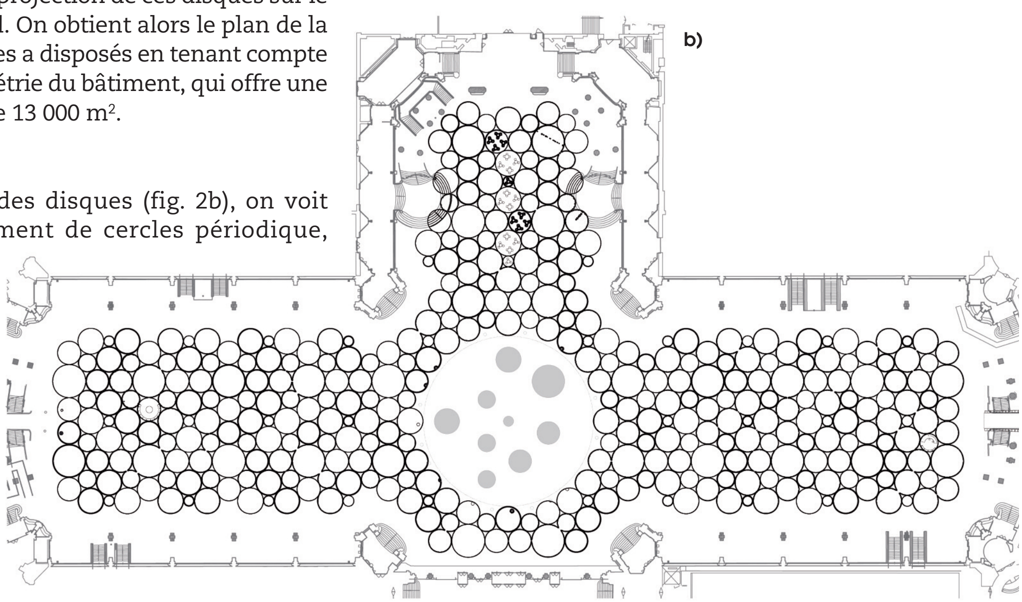


Figure 2. Le plan général de l'exposition en couleurs (a) et en noir et blanc (b). © Construire.

facilement prolongeable au plan tout entier (fig. 3). On peut donc déterminer un motif de taille finie permettant de reproduire tout le dessin comme pour un carrelage : le carré de la figure 4, par exemple.
On peut se contenter aussi d'une portion plus petite pour reproduire le pavage en entier. En effet, cet empilement de cercles n'est pas seulement périodique. Il possède également des axes de symétrie, qui constituent des familles de droites parallèles et régulièrement espacées. Deux axes appartenant à des familles différentes forment un angle multiple de 45° (fig. 5). Les points de croisement de ces axes sont de trois types, notés A, B ou C. Les points de croisement de type A sont situés au centre des plus petits cercles. Ceux de type B sont situés au centre des plus grands cercles. Les points de croisement de type C sont situés au point de tangence de deux cercles moyens de même diamètre et dont les centres sont alignés, horizontalement ou verticalement, avec ceux des plus grands cercles.
On dispose donc d'un motif avec lequel on peut reconstruire le pavage complet en utilisant des réflexions au lieu des seules translations (fig. 6). Ce petit motif est appelé un « domaine fondamental » pour les réflexions. Dans le cas présent, on peut obtenir l'empilement de cercles complet en reflétant le triangle ABC à travers chacun de ses côtés, puis en recommençant l'opération indéfiniment avec les triangles ainsi créés. Si l'on posait sur le plan du dessin un prisme droit de base ABC, avec des faces intérieures réfléchissantes, on verrait alors l'ensemble des cercles dans ce kaléidoscope.
Tout pavage périodique du plan admet un domaine fondamental qui permet de le reconstruire en utilisant des opérations géométriques élémentaires. Chacune de ces opérations peut être une réflexion, une rotation ou la combinaison d'une translation et d'une réflexion. Cette propriété repose sur un théorème de géométrie plane, qui nous apprend qu'une rotation – ou une translation – peut être décomposée systématiquement en deux symétries axiales successives convenablement choisies.

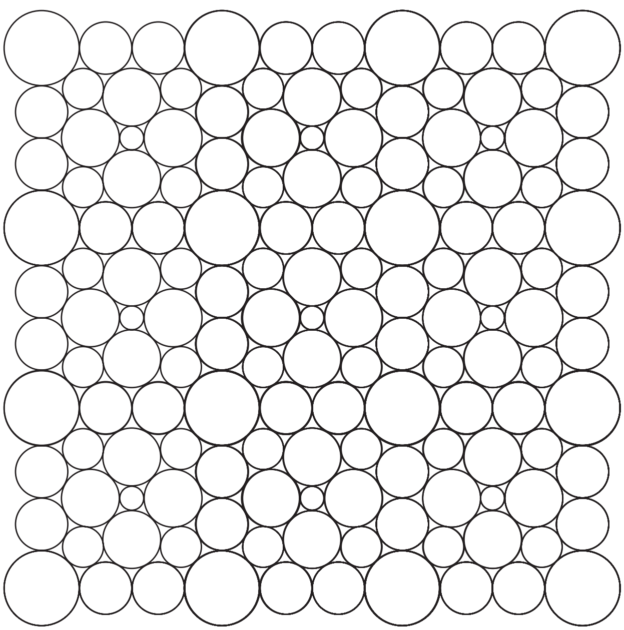


Figure 3. Empilement de cercles périodique. © R. Attal.

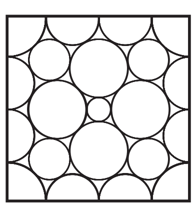


Figure 4. En reproduisant ce carré comme pour un carrelage, on obtient l'empilement de cercles complet. © R. Attal.

COLORIAGES

Intéressons-nous maintenant à la couleur des disques. Leur disposition peut sembler aléatoire, mais elle présente en fait une certaine périodicité. Ainsi, les couleurs des grands disques situés sur une même ligne verticale forment des suites alternées BRBRBR... et JVJVJV... visibles sur la figure 2a (B : bleu, R : rouge, J : jaune, V : vert). Cependant,

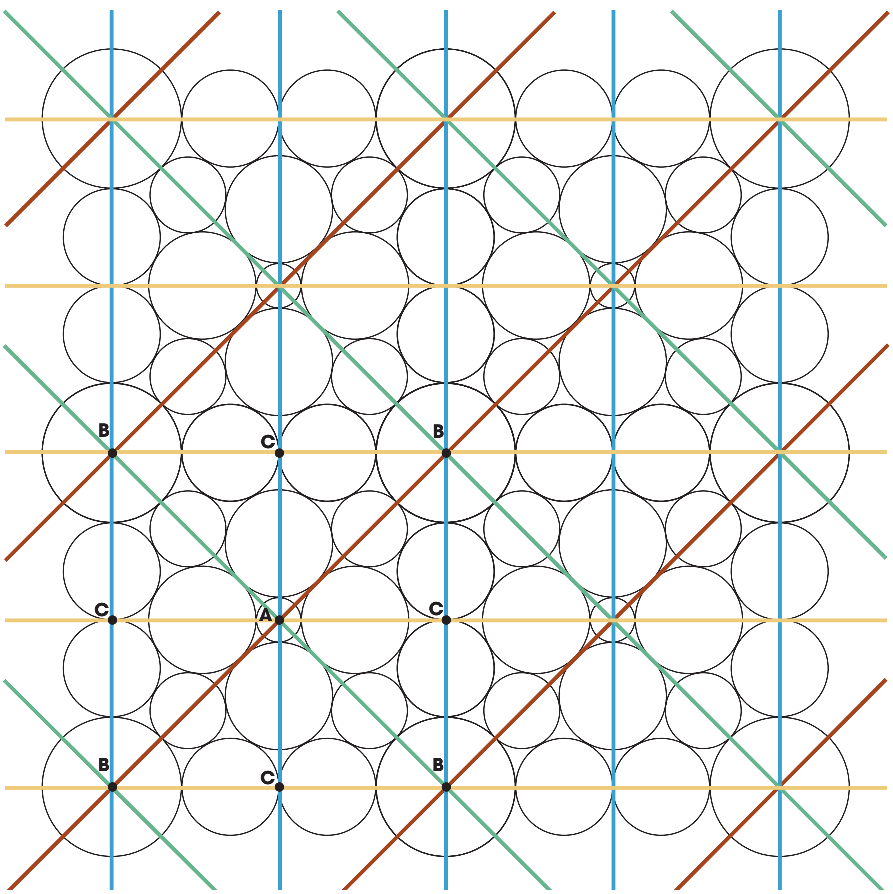
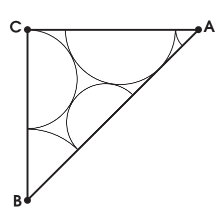


Figure 5. Les axes de symétrie de l'empilement de cercles d'*Excentrique(s), travail in situ.* © R. Attal.

Figure 6. Un domaine fondamental triangulaire pour les réflexions. © R. Attal.



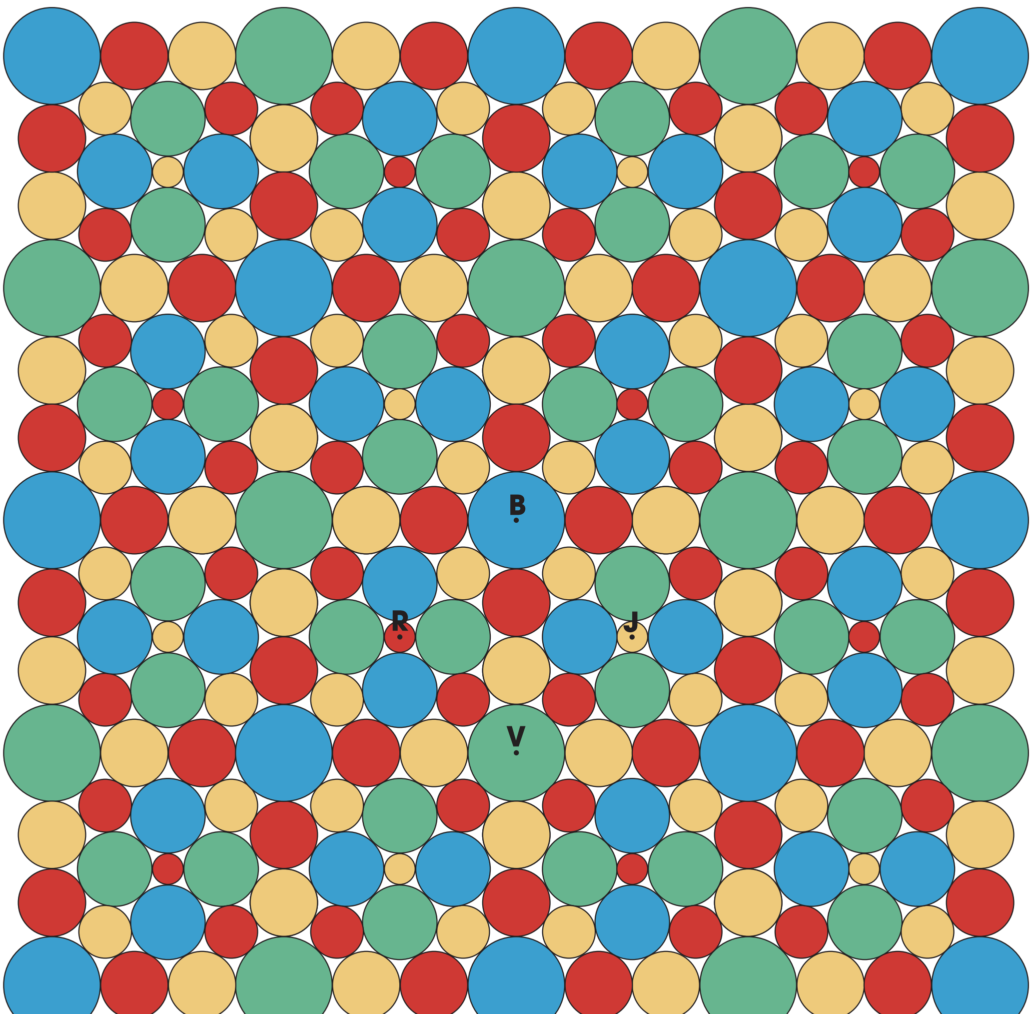
Daniel Buren a choisi aussi les couleurs pour éviter une trop grande répétitivité.
Un mathématicien aurait essayé sans doute de colorier les disques de sorte que deux cercles tangents aient toujours des couleurs différentes. En effet, le Théorème des quatre couleurs nous apprend qu'un tel coloriage existe pour toute carte

plane. La preuve générale est longue et complexe. On peut tenter néanmoins de trouver un coloriage vérifiant cette propriété pour une carte donnée. La figure 7 offre un exemple simple et périodique d'un tel coloriage.

Ce pavage périodique admet aussi un domaine fondamental, mais les opérations qui permettent de reconstruire le pavage ne contiennent que des rotations et aucune réflexion. Si vous cherchez des axes de symétrie dans le pavage de la figure 7, vous n'en trouverez pas. Les points J, B, R et V, situés respectivement au centre d'un petit disque jaune, d'un grand disque bleu, d'un petit disque rouge et d'un grand disque vert, sont des centres de symétrie du pavage : en le tournant d'un demi-tour autour de l'un de ces points, il revient sur lui-même.

On constate que l'adjonction de couleurs a modifié les symétries du pavage et la géométrie du domaine fondamental (fig. 8). Avec des couleurs disposées aléatoirement, le pavage ne présenterait plus de symétrie simple et il n'y aurait pas de domaine fondamental comme dans un pavage périodique. Il en est de même pour un cristal, dont les symétries dépendent à la fois du réseau cristallin et des atomes qui le constituent. La distri-

Figure 7. Un exemple de coloriage périodique. Deux disques tangents ne présentent jamais la même couleur.
© R. Attal.



bution, régulière ou aléatoire, d'atomes différents dans un réseau régulier confère au matériau des propriétés que ne possède pas un simple cristal périodique. **R. A.**

Pour en savoir plus

Conway J.H., Burgiel H., Goodman-Strauss C., *The Symmetries of Things*, A K Peters, 2008.

Stephenson K., *Introduction to Circle Packing. The Theory of Discrete Analytic Functions*, Cambridge University Press, 2005.

L'auteur remercie chaleureusement l'artiste, Daniel Buren, et l'architecte, Loïc Julienne, pour leur aimable coopération.

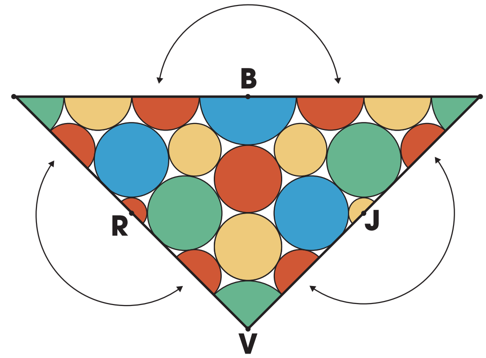


Figure 8. Pliez ce motif en faisant coïncider les trois sommets du triangle et vous obtiendrez le domaine fondamental du coloriage de la figure 7. © R. Attal.

Interview

Quelques questions à Daniel Buren

Peintre et sculpteur français, Daniel Buren est notamment connu pour l'utilisation de bandes verticales alternant le blanc et une couleur sur des supports aussi variés qu'insolites. Il a accepté d'en dire un peu plus sur son œuvre exposée dernièrement au Grand Palais.

PROPOS RECUEILLIS PAR **ROMAIN ATTAL** POUR LA REVUE *DÉCOUVERTE*

***Découverte.* Avez-vous utilisé des outils mathématiques pour concevoir *Excentriques(s), travail in situ* ?**

Daniel Buren. À part le dessin arabe du X^e siècle utilisé (qui me semble déjà fort complexe et admirable), aucun outil mathématique n'a été utilisé.

***Découverte.* Est-ce que les mathématiques sont un langage pertinent, voire nécessaire, dans votre travail ?**

D. B. Une sorte de moyen mathématique hyperélémentaire, oui. Toujours.

***Découverte.* Comment concevez-vous les interactions possibles, directes ou différées, entre artistes et mathématiciens ?**

D. B. Je suis certain que ces interactions sont non seulement possibles, mais constantes entre certains travaux dits artistiques (pas tous cependant) et les mathématiques.

***Découverte.* Que pensez-vous de l'engouement actuel pour les croisements entre art et science ?**

D. B. Rien de particulier.