Formes mathématiques
Le jeu de Hex

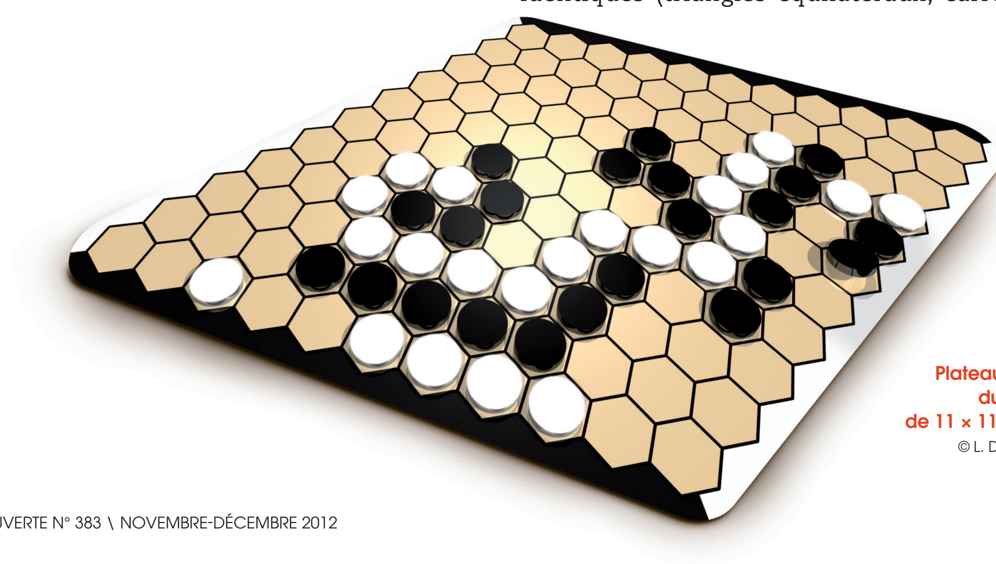
Inventé indépendamment dans les années 1940 par deux mathématiciens, le Danois Piet Hein (1905-1996) et l'Américain John Nash, le jeu de Hex, en plus d'être un jeu de stratégie très intéressant, permet d'aborder de façon ludique diverses facettes des mathématiques.

PAR **MICKAËL LAUNAY**, ANIMATEUR AU COMITÉ INTERNATIONAL DES JEUX MATHÉMATIQUES ET CHERCHEUR EN MATHÉMATIQUES À AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

Les règles de ce jeu sont extrêmement simples. Le plateau, composé de cases hexagonales, forme un losange dont deux côtés opposés sont blancs et les deux autres noirs. Tour à tour, chacun des deux joueurs pose un pion de sa couleur sur l'une des cases encore vides du plateau. Deux cases sont voisines quand elles ont un côté commun. Le premier qui parvient à tracer avec ses pions un chemin continu reliant les deux bords de sa couleur a gagné. Ainsi, sur la partie de la figure 1, les blancs sont les vainqueurs.

PAVAGES RÉGULIERS

Pourquoi avoir choisi un pavage composé d'hexagones ? Procédons par étapes. D'abord, si l'on veut un pavage régulier (fig. 2), c'est-à-dire un recouvrement d'une surface par des polygones réguliers identiques (triangles équilatéraux, carrés, penta-



Plateau traditionnel du jeu de Hex, de 11 × 11 hexagones.
© L. Demonet / CIJM.

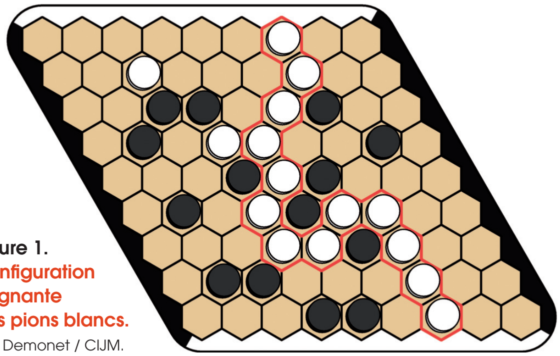


Figure 1. **Configuration gagnante des pions blancs.** © L. Demonet / CIJM.

gones ou hexagones réguliers…), on a peu de choix : triangles équilatéraux, carrés ou hexagones ; sur un plan, il n'en existe pas d'autres.
Pourquoi ? Parce que réussir à former un pavage avec un polygone régulier nécessite de pouvoir réaliser un tour complet en plaçant un certain nombre de ces polygones autour d'un sommet. Il faut donc que 360° (soit un angle faisant un tour complet) soit un multiple de l'angle de ce polygone. Par exemple, chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60° et 6 × 60 = 360° ; on peut envisager ainsi un pavage régulier à partir de triangles équilatéraux, en en mettant six autour de chaque sommet. De même, chaque angle d'un carré mesure 90° (4 × 90 = 360°) et chaque angle d'un hexagone régulier 120° (3 × 120 = 360°) ; on peut construire également un pavage en plaçant respectivement quatre carrés ou trois hexagones autour de chaque sommet.

En revanche, chaque angle d'un pentagone (cinq côtés) régulier mesure 108°. Trois de ces polygones ne suffisent pas à effectuer un tour complet (3 × 108 = 324°) et quatre le dépassent (4 × 108 = 432°). Par conséquent, on ne peut créer de pavage régulier avec des pentagones (fig. 3).
Les polygones possédant sept côtés, ou plus, ont des angles de plus de 120° mais de moins de 180°. Ainsi, deux ne suffisent pas et trois excèdent 360°. En définitive, les pavages réguliers de la figure 2 sont les seuls existants. Les autres pavages mélangent donc plusieurs polygones ou sont constitués de polygones non réguliers.
Revenons à notre problématique initiale : pourquoi avoir opté pour le pavage composé d'hexagones réguliers, parmi les trois configurations possibles, pour le jeu de Hex ? La plupart des jeux qui se déroulent sur un pavage font appel au pavage carré, tels que les échecs, les dames ou encore le jeu de go. Il existe d'autres jeux, moins connus, qui utilisent le pavage triangulaire voire des pavages non réguliers. Concernant le jeu de Hex, ce choix a été fait pour rendre le jeu plus intéressant. En effet, en optant pour des hexagones, on interdit toute partie nulle. Si vous n'y croyez pas, essayez donc de recouvrir entièrement un plateau de Hex avec des pions blancs ou noirs, sans qu'aucune des deux couleurs ne gagne : vous n'y parviendrez pas !
Remarquons qu'avec un pavage de triangles ou de carrés, à l'inverse, il est facile de trouver des situations de blocage, à moins de considérer que deux cases qui ne se

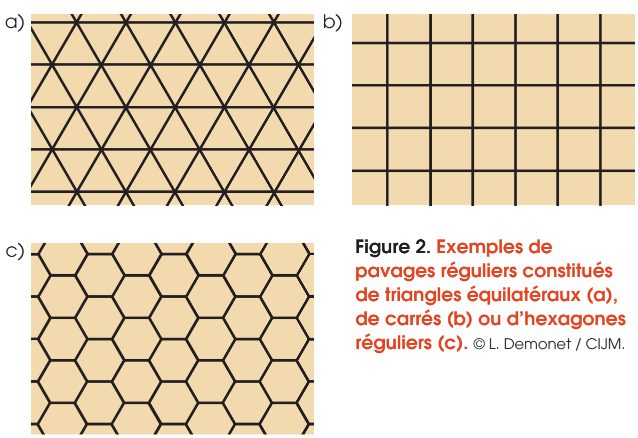


Figure 2. **Exemples de pavages réguliers constitués de triangles équilatéraux (a), de carrés (b) ou d'hexagones réguliers (c).** © L. Demonet / CIJM.

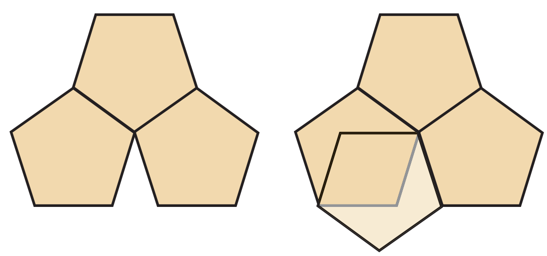


Figure 3. **L'assemblage de pentagones réguliers ne permet pas de former un pavage régulier.** © L. Demonet / CIJM.

touchent que par un sommet sont voisines. Dans ce cas, chaque case aurait tant de voisins que le jeu perdrait en intérêt, et il faudrait établir une autre règle du jeu (fig. 4). Pour prouver qu'aucune partie nulle n'est possible, considérons un plateau de Hex entièrement recouvert de pions noirs et blancs, et regardons tous les pions blancs qui sont reliés au bord blanc supérieur (entourés en rouge sur la figure 5). Il y a alors deux cas envisageables : soit ces pions blancs rejoignent le bord inférieur – auquel cas les blancs ont gagné – soit ces pions sont cernés par des pions noirs, qui leur font barrage (notés X sur la figure 5b) et raccordent donc les deux bords noirs. Dans un cas comme dans l'autre, l'un des deux joueurs a gagné.

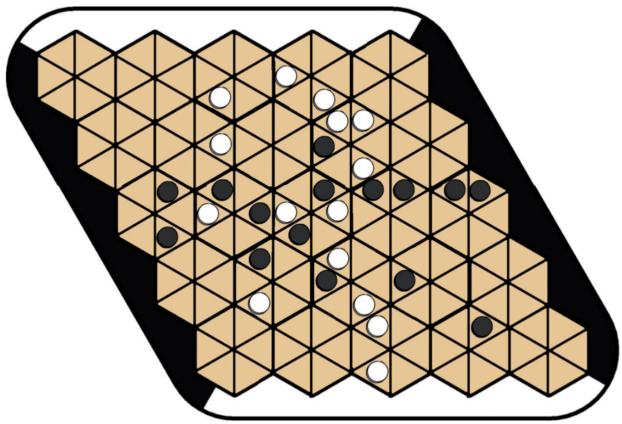


Figure 4. Sur un tableau composé de triangles équilatéraux, bloquer son adversaire est (trop) facile. © L. Demonet / CIJM.

PERCOLATION

Face à un plateau de jeu de Hex rempli, certains mathématiciens penseront tout de suite à un sujet *a priori* sans aucun lien avec les jeux : la théorie de la percolation. Cette dernière se rapporte à la modélisation d'objets présentant des structures aléatoires avec des pleins et des creux, comme des roches poreuses pouvant ou non laisser passer de l'eau qui s'écoule. Un percolateur est d'ailleurs un type de machine à café dans laquelle l'eau chemine à travers la poudre de café, donc dans les espaces vides entre ses grains.

On peut imaginer qu'une roche poreuse est composée de pleins et de trous, de la même façon que le plateau de Hex est recouvert de pions noirs et blancs. Prédire si l'eau traversera une roche quand il pleut – c'est-à-dire si la roche est perméable – revient donc à déterminer si les pions blancs dessineront un chemin reliant les deux bords blancs du plateau. Bien sûr, il ne s'agit plus ici de deux stratégies qui s'affrontent : on pose les pions de façon aléatoire et l'on regarde si un tel tracé existe ou non. Dans le jeu de Hex, il y a, en principe, autant de pions noirs que de pions blancs. Mais pour modéliser les phénomènes de percolation, le tout est de jouer justement sur le rapport entre blancs et noirs, ce qui correspond à des milieux plus ou moins poreux. On constate qu'il existe une proportion critique de trous (pions blancs par exemple) au-delà de laquelle, à grande échelle (c'est-à-dire pour un plateau assez grand), l'eau passera toujours, alors qu'en dessous de cette valeur elle ne circulera jamais. Pour le réseau hexagonal, cette proportion est égale précisément à 50 % et découle des propriétés mêmes de ce réseau, qui interdisent les parties nulles. En revanche, dans le cas de réseaux plus ou moins réguliers, ce rapport peut être totalement différent. Il vaut ainsi environ 59 % pour le réseau carré et approximativement 70 % pour le réseau triangulaire. Toutefois, établir les valeurs précises de ces seuils n'est pas chose aisée et reste, la plupart du temps, un mystère pour les mathématiciens.

THÉORIE DES JEUX

Revenons maintenant au jeu à proprement parler. L'une des premières questions que se pose un mathématicien est de savoir si l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante, c'est-à-dire une méthode lui permettant de gagner à tous les coups, quel que soit le jeu de l'adversaire.

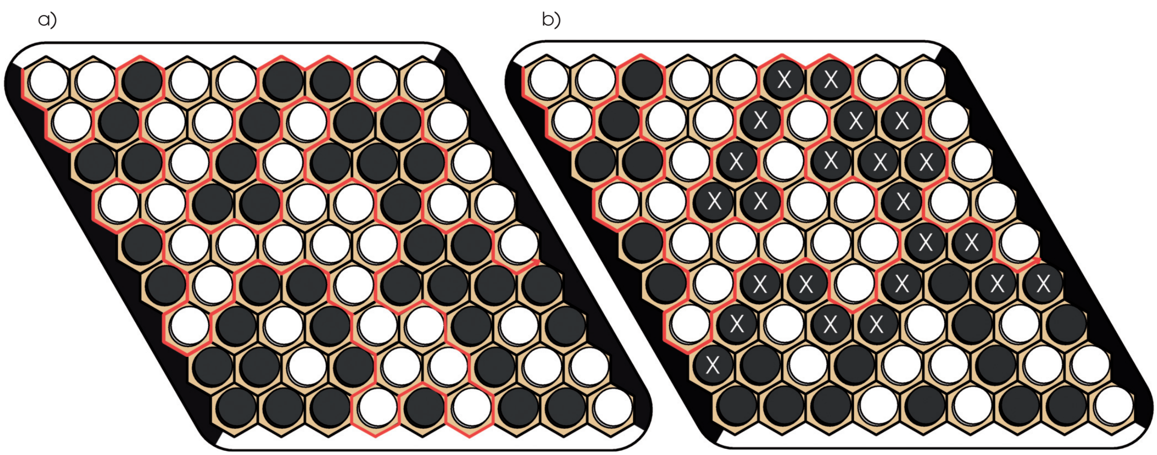


Figure 5. a) Configuration gagnante des blancs.
b) Configuration gagnante des noirs. © L. Demonet / CIJM.

Réfléchissons donc à ce problème : soit les blancs (qui commencent) ont une stratégie gagnante, soit ils n'en ont pas. Jusque-là, tout va bien. Mais si les blancs ne possèdent pas de stratégie gagnante, cela signifie qu'à chaque coup, les noirs ont la possibilité de contrer les blancs ; autrement dit à chaque tour, les noirs disposent d'un coup qui empêche les blancs de se retrouver dans une situation gagnante. Si les noirs jouent systématiquement ce type de coups, les blancs ne gagneront pas. Comme il ne peut y avoir de partie nulle, les noirs l'emportent automatiquement. Et s'il n'existe pas de stratégie gagnante pour les blancs, c'est qu'il en existe une pour les noirs. Dans tous les cas, l'un des deux joueurs possède forcément une stratégie gagnante !

À vrai dire, ce raisonnement est valable pour tous les jeux de stratégie sans hasard dans lesquels il n'y a pas de partie nulle. Pour tous ces jeux donc, l'un des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante. On peut même pousser le raisonnement plus loin et certifier que c'est le joueur initiant la partie qui détient une stratégie gagnante. En effet, au jeu de Hex, un pion de votre couleur posé sur le plateau ne peut pas vous gêner. Si la stratégie gagnante appartenait au second joueur, alors le premier pourrait jouer simplement un coup pour rien, puis adopter la stratégie du second joueur. Son premier coup ne pouvant être un handicap, le premier joueur gagne. Par conséquent, le second joueur ne peut avoir de stratégie gagnante et c'est donc le premier qui en possède une. Vous suivez toujours ?

Ce que nous venons de faire s'appelle, en mathématiques, une preuve non constructive : nous avons montré que quelque chose existe (une stratégie gagnante pour le premier joueur), sans pour autant l'avoir décrit explicitement (on ne sait pas du tout ce que le premier joueur doit jouer pour être certain de gagner !). Concrètement, la stratégie gagnante n'est pas connue aujourd'hui pour des plateaux de Hex suffisamment grands (à partir de neuf hexagones sur le bord du plateau). Et heureusement : le jeu garde ainsi tout son intérêt ! **M. L.**

Pour en savoir plus

Sur la percolation :

> http://sciences.siteduzero.com/tutoriel-3-703938-la-percolation.html