Formes mathématiques

Toutes les ficelles pour réussir sa chute

Voici un défi stupide. Vous disposez d'un tableau, d'une ficelle fermée et de deux clous plantés dans un mur. Votre mission, si vous l'acceptez, consiste à « mal » accrocher le tableau au mur ; le but étant que si l'on enlève un clou, peu importe lequel, le tableau tombe…

PAR **ROBIN JAMET**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE DE L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Commençons par un problème plus abordable pour convaincre les plus sceptiques de la faisabilité de cette manœuvre : comment attacher un tableau à un seul clou sans réellement le fixer ? Autrement dit, comment faire passer une ficelle fermée (le tableau n'est utilisé que pour donner du poids) autour d'un clou de manière à ce qu'elle tombe dès que l'on tire dessus ? Pour peu que l'on ne fasse pas de nœud ou de croisement avec la ficelle, la réponse semble assez simple : on regarde si le clou est à « l'intérieur » ou à « l'extérieur » de celle-là. Dans le premier cas, il bloque la ficelle ; dans le second, rien ne la retient. Il suffit donc de déterminer si l'on se situe à l'intérieur ou à l'extérieur d'une boucle fermée sans croisement. Relativement facile à mettre en pratique avec une véritable ficelle de taille raisonnable, ce problème fut un véritable casse-tête à résoudre en toute rigueur. D'ailleurs, la question fondamentale n'était pas : « Comment savoir si l'on se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur ? »,

Figure 1. Poser une ficelle sur un clou, ce n'est pas l'attacher…

Figure 2. La « courbe de la balle de tennis ».

Figure 3. Les deux clous, plantés perpendiculairement l'un par rapport à l'autre, se situent à l'extérieur de la « courbe de la balle de tennis ».

Figure 4. Une solution pour « mal » accrocher un tableau avec deux clous.

mais simplement : « Existe-t-il un intérieur et un extérieur ? » (encadré *Le théorème de Jordan*) !
Aucune inquiétude à avoir si vous tentez l'expérience physiquement, il est tout à fait possible d'établir si le clou se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la courbe fermée délimitée par la ficelle. L'exemple le plus élémentaire de ficelle fermée qui ne tient pas consiste à « poser » simplement celle-là au-dessus d'un clou. Il est manifeste que dans ce cas, elle n'est absolument pas retenue par ce dernier et si l'on y attache un tableau, il tombera dès qu'on le lâche (fig. 1)…

UNE MÉTHODE INTUITIVE

Revenons au problème posé. Bien sûr, si l'on se contente d'accrocher le tableau de façon « classique », en faisant passer la ficelle au-dessus des deux clous, l'issue n'est pas celle attendue. Le fait d'enlever un clou ne se solde pas par la chute du tableau, puisqu'il reste attaché au second. Si l'on suspend la ficelle au-dessus de l'un des deux clous seulement, c'est encore raté : si l'on retire l'autre clou, le tableau restera en place. C'est donc un peu plus compliqué que ça ! Cependant, avec un peu de réflexion, deux clous et une ficelle fermée, vous pouvez chercher (et trouver !) une solution avant de lire la suite…
On peut traiter ce problème de plusieurs façons. Intuitivement, l'image de la courbe représentée sur une balle de tennis (fig. 2) peut nous mettre sur la voie : on repère vite le moyen de planter deux clous imaginaires perpendiculairement l'un à l'autre, en les passant chacun à travers deux « demi-tours » de la ligne (fig. 3). On se rend compte que ces deux clous, tout en tenant cette ligne, se situent bien à l'extérieur de cette dernière. Il ne reste plus qu'à les tourner afin qu'ils soient parallèles et à les enfoncer dans un mur pour trouver une solution (fig. 4). L'expérimentation permet de mieux comprendre comment le système fonctionne et donne, comme souvent, l'impression rétrospective que la solution était d'une évidence déconcertante !

On peut aborder aussi cet exercice d'un point de vue beaucoup plus formel, en ayant déjà une solution sous les yeux. Si vous observez attentivement celle proposée précédemment, par exemple, vous remarquerez que la ficelle passe deux fois autour de chaque clou, une fois dans chaque sens. C'est logique : tout ce qui est fait doit être défait ; mais pas immédiatement après, sinon rien ne tiendrait. Étudions cela pas à pas.

ET EN FORMALISANT UN PEU ?

Appelons *a* et *b* les deux clous, et désignons par A le fait de passer la ficelle au-dessus de *a* dans le sens des aiguilles d'une montre et A^{-1} le passage dans le sens inverse au-dessus de ce même clou. B et B^{-1} correspondent aux passages au-dessus du clou *b*. Enchaîner A et A^{-1} équivaut à ne rien faire, à poser une boucle au-dessus d'un clou ; bref, le tableau tombera. En revanche, si l'on intercale un B entre les deux, celui-là empêche les deux tours de s'annuler. Avec un tel code, un « calcul » très simple suffit pour déterminer si une configuration aboutira ou non au maintien du tableau. Il consiste à enlever tout ce qui peut être enlevé – c'est-à-dire une lettre et son inverse qui se suivent – en recommençant

Figure I.
Courbe de Jordan complexe.

autant de fois que nécessaire. À la fin de l'opération, si une ou plusieurs lettres demeurent, le tableau tient ; dans le cas contraire, il tombe. Sachant qu'ôter un clou revient évidemment à éliminer toutes les occurrences de la lettre qui lui est associée, nous pouvons enfin réfléchir au problème à l'aide de l'arme la plus précieuse du mathématicien : le fameux « papier/crayon ».
Vérifions rapidement la validité de cette formalisation sur la solution précédente. Si l'on appelle *a* le clou de gauche et *b* celui de droite, elle se code : $ABA^{-1}B^{-1}$. Le tableau tient effectivement, mais ôter le clou *a* équivaut à supprimer les occurrences de A : il reste alors BB^{-1}, soit l'enchaînement d'un passage dans un sens puis dans l'autre au-dessus du clou *b*. La formule se réduit donc à… rien du tout ! Concrètement, le tableau effectue la chute tant espérée. La situation est identique si l'on retire le clou *b*.
À votre tour maintenant de chercher des solutions pour plus de deux clous, par la pratique ou en manipulant tranquillement des lettres – ce qui est toujours moins complexe que de manier des clous, une ficelle et un tableau qui commence à « accuser le coup »… **R. J.**

Le théorème de Jordan

Tracez une ligne fermée et sans croisement sur une feuille de papier. « Fermée » signifie que vous revenez à votre point de départ. La réponse à la question qui suit semble si évidente que l'on peut légitimement se demander comment des gens « sérieux » osent se la poser. Toutes les courbes fermées et sans croisement séparent-elles bien le plan en deux parties : une finie, que nous appelons l'intérieur, et une infinie (en imaginant votre feuille infinie bien entendu), l'extérieur ? La question a été formulée tardivement, au début du XIXe siècle, car il fallait admettre déjà qu'elle était digne d'une démonstration. La première a été fournie en 1887 par un mathématicien français, Camille Jordan (1838-1922). Cependant, de nombreux confrères la jugent trop lacunaire pour être considérée comme telle. Comment expliquer que ce fait si difficile à démontrer nous paraisse trivial ? Sans doute parce que nous n'avons pas assez d'imagination. Une simple courbe fermée, sans recoupement, peut ressembler à un véritable labyrinthe, plein de tours et de détours (fig. I). N'oublions pas que mathématiquement, il est toujours possible de l'enrichir de sinuosités de plus en plus petites, à l'infini, et obtenir ainsi un monstre fractal. Dans de pareilles situations, il n'est plus si évident de distinguer l'intérieur de l'extérieur.
Pour savoir si l'on se trouve dedans ou dehors, il existe malgré tout un moyen simple, qui peut s'appliquer presque systématiquement et qui est à la base de la démonstration de Jordan. Prenez un point n'importe où. À partir de ce point, tracez une demi-droite dans une direction quelconque. Si elle coupe la courbe un nombre impair de fois, le point est à l'intérieur, sinon il est à l'extérieur. Attention toutefois, ce n'est pas toujours vrai (fig. II et fig. III). Néanmoins, le principe fonctionne globalement et permet, après bien des efforts, de parvenir à ses fins : une courbe fermée sans croisement détermine bien deux surfaces séparées l'une de l'autre, chacune d'un seul tenant.
Nous vous invitons désormais à tester cette méthode avec une dernière expérience : prenez une longue ficelle fermée et posez-la de façon totalement désordonnée (mais sans croisement). Placez votre doigt au hasard quelque part. Vous pouvez très vite savoir si la ficelle est bloquée par le doigt ou non. Pour le vérifier, rien de plus simple : tirez sur la ficelle… Attention, exercice plus difficile : et si l'on s'autorise des croisements ?

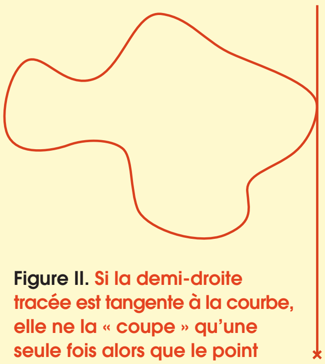

Figure II. Si la demi-droite tracée est tangente à la courbe, elle ne la « coupe » qu'une seule fois alors que le point se situe en dehors de la courbe.

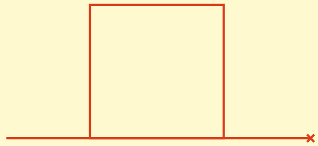

Figure III. La demi-droite coupe une courbe de forme carrée en une infinité de points.