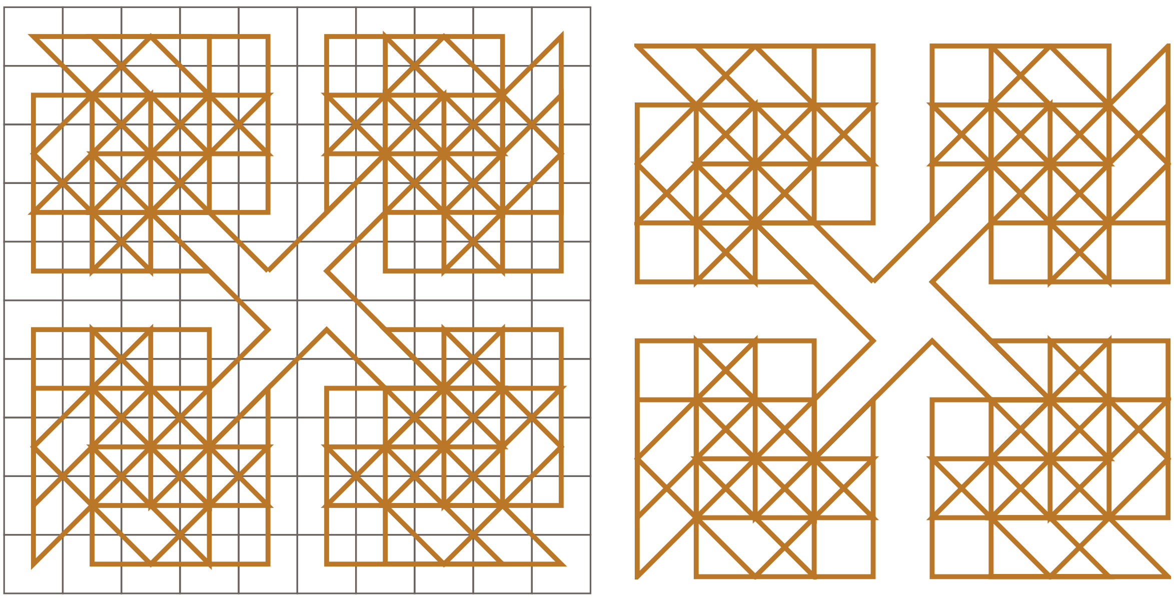
Formes mathématiques

Courrier à un visiteur Énigme résolue !

Les ateliers de récréations mathématiques offrent souvent l'opportunité d'échanger avec le public. Les discussions que nous, médiateurs, pouvons avoir avec les visiteurs sur les jeux que nous leur proposons sont très enrichissantes. Parfois, les rôles s'inversent et ce sont eux qui nous soumettent leurs problèmes. Il arrive d'ailleurs que le sujet soit totalement inédit pour nous. En voici un exemple.

PAR **PIERRE AUDIN**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE DE L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE



« Trace » des carrés magiques. Voyez-vous le lien qui existe entre ces dessins et la solution au problème évoqué dans cet article ? © G. Reuiller.

Au Palais de la découverte, nous présentons régulièrement aux visiteurs des activités mathématiques et ludiques. En jouant, ils se posent des questions et (re)découvrent quelques principes utiles. Comment construit-on une démonstration ? Qu'est-ce qu'une condition nécessaire ? Une condition suffisante ? Que signifie répondre à une question ? Qu'est-ce qu'une définition et comment l'élabore-t-on ?

L'une des activités proposées (intitulée « les cylindres colorés ») consiste à réaliser un carré gréco-latin, qui nous mène parfois à la création d'un carré magique, cette grille de nombres aux propriétés particulières (encadré *Le parcours du cavalier*). Alors que je discutais de carrés magiques avec un visiteur, ce dernier m'a soumis un problème que je ne connaissais pas et sur lequel il butait depuis plusieurs années. Étant peu familiarisé avec la vulgarisation scientifique, il m'a expliqué simultanément le sujet et la manière dont il l'avait abordé. Par politesse, je n'ai pas osé l'interrompre. J'ai pourtant assez d'expérience pour savoir que si sa façon de traiter le problème le conduisait à un échec, il valait mieux ne pas m'en parler : je risquais de me heurter aux mêmes difficultés. L'avenir m'a donné raison, du moins au début.

Le parcours du cavalier

D'où peut bien provenir la méthode de mon visiteur ? Il connaissait sans doute le problème classique du parcours du cavalier, attribué au mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783). Aux échecs, le cavalier se meut en dessinant un « L » de 3 cases sur 2, qui peut être tourné dans n'importe quelle direction (fig. I). Le défi revient alors à déplacer la pièce sur un échiquier en la faisant passer une fois, et une seule, par toutes les cases du plateau. Le plus simple est d'utiliser un quadrillage de 8 cases sur 8 et de les numéroter dans l'ordre suivi par le cavalier à l'aide d'un crayon. Une stratégie classique consiste à déplacer le cavalier en tournant autant que possible le long du bord de l'échiquier (fig. II). Le problème présente de nombreuses solutions (fig. III). Une multitude d'élèves s'est employée d'ailleurs, lors de cours ennuyeux, à en chercher et en trouver ! La deuxième solution (fig. III), où les cases numérotées 64 et 1 sont à distance de cavalier l'une de l'autre, permet de parvenir à 63 autres en déplaçant le point de départ sur n'importe quelle case.

En réalité, les deux carrés de la figure III ont une caractéristique supplémentaire. La somme des nombres contenus sur une ligne vaut toujours 260, celle des nombres figurant dans une colonne également. En plus d'apporter des solutions au parcours du cavalier, ce sont donc presque des carrés magiques – il aurait fallu pour cela que les sommes des nombres situés sur chaque diagonale soient aussi toujours égales à 260, ce qui n'est, hélas !, pas le cas. Collégien, je me souviens avoir trouvé un parcours du cavalier dont les sommes des nombres des lignes et des colonnes aboutissaient à un total de 260, celle des nombres d'une diagonale donnant 256 et l'autre 264. J'ai abandonné finalement cette quête, les cours devenant sans doute plus intéressants au lycée. J'ai été très déçu plus tard, lorsque j'ai appris qu'il n'existe aucun parcours du cavalier qui soit en même temps un carré magique.

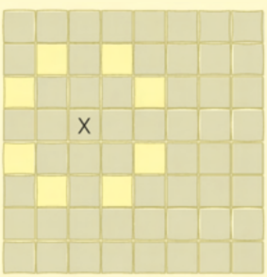


Figure I. De la case marquée d'une croix, le cavalier ne peut atteindre, en se déplaçant en « L », que les cases jaunes.

1		13		3		15	
		2		14		4	
	12						16
							5
11						17	
						6	
	10		20		8		18
			9		19		7

Figure II. Exemple de début de parcours du cavalier avec un déplacement le long du bord du quadrillage.

31	54	7	48	9	34	27	50
6	47	32	53	28	49	10	35
45	30	55	8	33	26	51	12
56	5	46	29	52	11	36	25
3	44	57	20	37	24	13	62
58	19	4	41	16	61	38	23
43	2	17	60	21	40	63	14
18	59	42	**1**	**64**	15	22	39

34	19	48	63	22	13	50	11
47	62	35	20	49	10	23	14
18	33	**64**	45	16	21	12	51
61	46	17	36	9	52	15	24
32	7	60	**1**	44	25	38	53
59	4	29	8	37	56	41	26
6	31	2	57	28	43	54	39
3	58	5	30	55	40	27	42

Figure III. Exemples de solution au problème du parcours du cavalier. La grille de droite donne lieu à 63 autres solutions, rien qu'en transférant le chiffre 1 sur n'importe quelle autre case.

ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Le problème est le suivant : il s'agit de placer successivement tous les nombres entiers de 1 à 100 dans un quadrillage carré de 100 cases. On commence donc par inscrire le 1. Puis, pour passer d'un nombre au suivant, on applique deux règles : si l'on se déplace horizontalement ou verticalement, on laisse deux cases vides entre les deux entiers consécutifs ; si l'on se déplace en diagonale, on ne laisse qu'une seule case vide (fig. 1). Un bon dessin valant mieux qu'un long discours, voici l'une de mes tentatives, qui utilise la stratégie exposée par mon visiteur (et proche de méthodes connues pour traiter des problèmes similaires – se reporter à

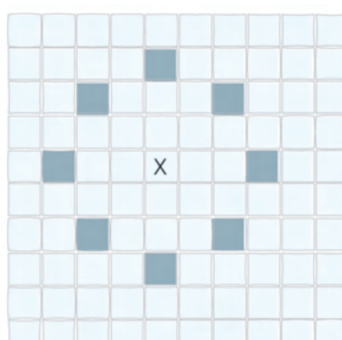


Figure 1. Un entier quelconque ayant été inscrit dans la case X, les cases coloriées correspondent aux seules cases pouvant contenir le nombre suivant.

→→→

l'encadré). Elle consiste à tourner en suivant le bord du quadrillage (fig. 2). J'y parviens en me déplaçant horizontalement et verticalement – plaçant ainsi les entiers 1 à 12 – mais pour inscrire le 13, je dois partir en diagonale. Puis je reprends les déplacements horizontaux et verticaux pour les entiers 13 à 20. Pour placer le 21, je dois partir de nouveau en diagonale, avant de réitérer les déplacements verticaux et horizontaux, en tournant cette fois dans l'autre sens ; et ainsi de suite. Cependant, cette belle régularité ne dure pas très longtemps… Finalement, lorsque j'inscris le 97, je ne peux plus poursuivre : il me reste trois cases vides impossibles à atteindre pour inscrire les trois nombres manquants en respectant les règles initiales.

À PLUS PETITE ÉCHELLE

Après quelques essais infructueux, je me suis demandé comment je pouvais utiliser mes connaissances en mathématiques pour résoudre ce problème. Je l'ai donc repris avec un nouvel angle d'attaque : et si le quadrillage était plus petit ? Un carré de 9 cases (3 sur 3) ne semble pas suffisant compte tenu des règles à observer. Il vaut mieux un carré de 25 cases (5 sur 5), d'autant que le quadrillage initial, de 100 cases (10 sur 10), peut se découper en quatre quadrillages de 25 cases.
Essayons de remplir le carré de 25 cases. Nous verrons si cela peut nous aider à compléter celui de 100. Après deux tentatives inabouties (fig. 3), je finis par réussir (fig. 4a). De plus, ce remplissage est très intéressant car après le 25, on peut continuer en diagonale sous le 1 et « passer » ainsi dans un bloc similaire de 5 sur 5 tourné

1	31	52	2	30	51	3	29	50	4
42	67	13	41	66	14	40	65	15	39
21	58	74	95	59	73	96	60	80	28
12	32	53	85	92	64	86		49	5
43	68	20		**97**	89	81	72	16	38
22	57	75	94		84	93	61	79	27
11	33	54	88	91	63	87	90	48	6
44	69	19	83	70	18	82	71	17	37
23	56	76	24	55	77	25	62	78	26
10	34	45	9	35	46	8	36	47	7

Figure 2. Première tentative : raté !

de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, de façon à insérer ce bloc au-dessous du premier dans le carré de 10 sur 10. On procède à l'identique pour les deux derniers blocs de la figure 4b.
On obtient au final un carré de 10 sur 10 dans lequel figurent quatre carrés de 25 cases remplis avec les nombres 1 à 25, chacun des quatre carrés étant en connexion avec le carré suivant et le quatrième avec le premier (fig. 5). Il n'y a plus qu'à ajouter 25 à tous les nombres du deuxième

3	14	7	4	
9	21	18	12	
16	5	2	15	6
19	13	8	20	
10	**22**	17	11	**1**

3	12	9	4	13
21	6	15	20	7
10	18	2	11	17
		8	5	14
22		16	19	**1**

Figure 3. Deux tentatives infructueuses de remplissage du carré de 5 sur 5.

3	20	10	4	19
15	23	7	16	24
9	12	2	21	11
6	17	**25**	5	18
14	22	8	13	**1**

Figure 4a. Un remplissage réussi du carré de 5 sur 5.

14	6	9	15	3
22	17	12	23	20
8	**25**	2	7	10
13	5	21	16	4
1	18	11	24	19

19	24	11	18	**1**
4	16	21	5	13
10	7	2	**25**	8
20	23	12	17	22
3	15	9	6	14

1	13	8	22	14
18	5	**25**	17	6
11	21	2	12	9
24	16	7	23	15
19	4	10	20	3

Figure 4b. En appliquant des rotations successives de 90° au carré de la figure 4a, on aboutit à trois nouvelles configurations.

3	20	10	4	19	14	6	9	15	3
15	23	7	16	24	22	17	12	23	20
9	12	2	21	11	8	**25**	2	7	10
6	17	**25**	5	18	13	5	21	16	4
14	22	8	13	**1**	**1**	18	11	24	19
19	24	11	18	**1**	**1**	13	8	22	14
4	16	21	5	13	18	5	**25**	17	6
10	7	2	**25**	8	11	21	2	12	9
20	23	12	17	22	24	16	7	23	15
3	15	9	6	14	19	4	10	20	3

Figure 5. Le carré de 10 sur 10 rempli avec les quatre carrés de 5 sur 5.

carré, 50 à ceux du troisième et 75 à ceux du quatrième pour voir se profiler une solution (fig. 6).

D'AUTRES SOLUTIONS

À partir du quadrillage de la figure 6, on peut en construire 99 autres, simplement en décalant les nombres de 1 à 100 : 100 prend la place de 1, 1 prend la place de 2, 2 prend la place de 3..., et ce jusqu'à 99 qui prend la place de 100 (fig. 7). Ou encore : 100 se substitue à 2, 2 se substitue à 3, et ainsi de suite jusqu'à 99 qui se substitue à 1.
Bien entendu, il est possible d'utiliser des symétries différentes pour parvenir à d'autres solutions. Par exemple, remplacer dans l'une de ces 100 solutions chacun des nombres par son complément à 101. Les compléments à 101 des entiers 1, 2, 3, 4, …, 99 et 100 sont 100, 99, 98, 97, …, 2 et 1, c'est-à-dire les mêmes nombres mais dans l'ordre inverse.

RÉPONSE AU VISITEUR

Quelle est la morale de cette histoire ? J'avais prié mon visiteur de me recontacter quelques jours après, au cas où j'aurais trouvé une solution entre-temps. Malheureusement, je lui ai communiqué une adresse erronée*. J'ai commencé par garder dans ma poche quelques quadrillages, en espérant que mon hôte revienne. Ne l'ayant pas revu, j'ai écrit cet article, qu'il lira peut-être. Dans ce cas, il saura que :
– il faut soigner la manière d'énoncer un problème (afin d'éviter de donner en même temps des pistes, bonnes ou mauvaises) ;
– son problème a des solutions ;

3	20	10	4	19	89	81	84	90	78
15	23	7	16	24	97	92	87	98	95
9	12	2	21	11	83	**100**	77	82	85
6	17	25	5	18	88	80	96	91	79
14	22	8	13	**1**	76	93	86	99	94
44	49	36	43	26	51	63	58	72	64
29	41	46	30	38	68	55	75	67	56
35	32	27	50	33	61	71	52	62	59
45	48	37	42	47	74	66	57	73	65
28	40	34	31	39	69	54	60	70	53

Figure 6. Une solution où l'on passe de 100 à 1 en suivant les règles initiales.

– l'utilisation des symétries, dans le carré ou dans la manipulation des nombres, permet d'obtenir plusieurs solutions ;
– il peut continuer à chercher car il existe peut-être d'autres solutions qui ne présentent pas ces jolies symétries.
À lui et à vous de jouer ! **P. A.**

* Cher visiteur, si vous souhaitez poursuivre la discussion avec l'auteur, vous pouvez le contacter sur sa messagerie électronique (pierre.audin@universcience.fr).

2	19	9	3	18	88	80	83	89	77
14	22	6	15	23	96	91	86	97	94
8	11	**1**	20	10	82	**99**	76	81	84
5	16	24	4	17	87	79	95	90	78
13	21	7	12	**100**	75	92	85	98	93
43	48	35	42	25	50	62	57	71	63
28	40	45	29	37	67	54	74	66	55
34	31	26	49	32	60	70	51	61	58
44	47	36	41	46	73	65	56	72	64
27	39	33	30	38	68	53	59	69	52

Figure 7. Une autre solution, obtenue en commençant à remplir le tableau par 100.