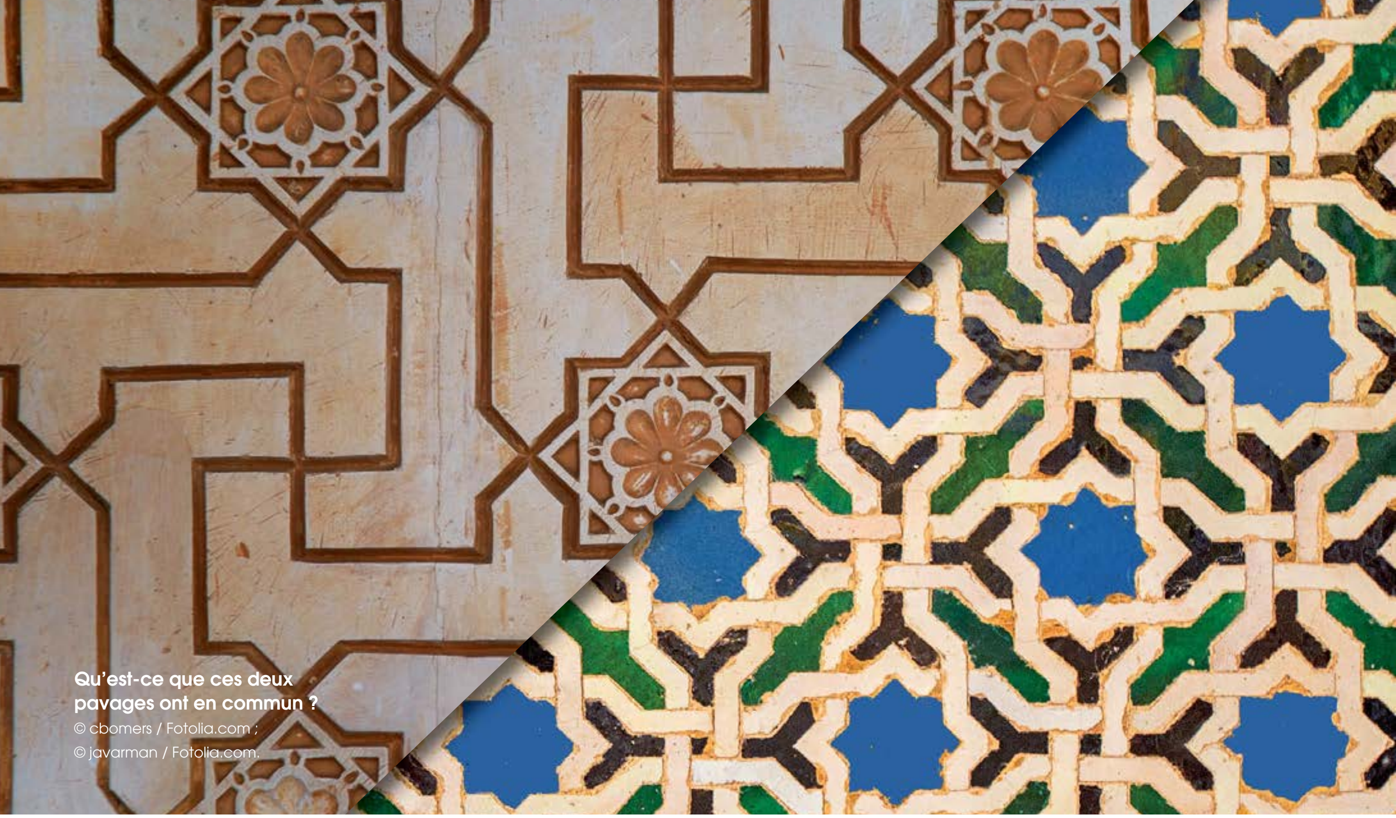

Qu'est-ce que ces deux pavages ont en commun ?
© cbomers / Fotolia.com ; © javarman / Fotolia.com.

Formes mathématiques
Vous avez dit « symétries » ?

Vous avez déjà entendu et utilisé le mot « symétrie ». Vous est-il possible cependant d'en donner une définition ? Pas si facile, notamment parce qu'il existe plusieurs types de symétries. Nous vous proposons d'explorer la richesse de cette notion fondamentale en mathématiques, en commençant par observer des pavages de l'Alhambra…

PAR **GUILLAUME REUILLER**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE DE L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

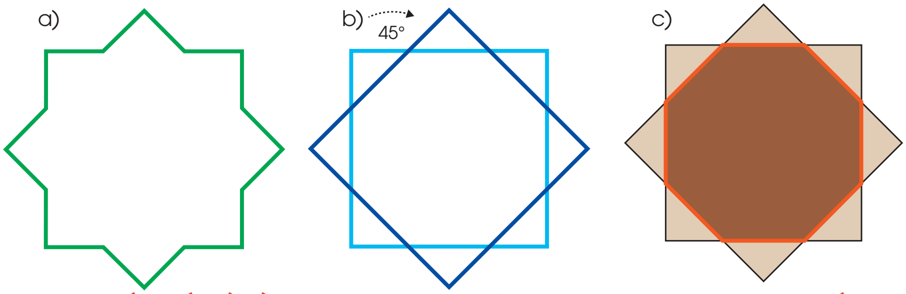

Figure 1. L'étoile régulière à huit branches (a) et deux façons de la construire : avec deux carrés (b) ou en prolongeant les côtés d'un octogone régulier, ici en marron foncé (c). © G. Reuiller.

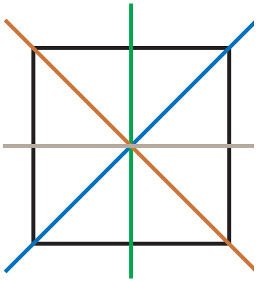

Figure 2. Les quatre axes de symétrie du carré. © G. Reuiller.

Paver un plan, c'est le recouvrir avec des pièces sans chevauchement ni espace vide. Regardez attentivement les deux pavages ci-contre issus des palais de l'Alhambra et essayez de trouver leurs points communs. Ils présentent par exemple tous deux des pièces en forme d'étoile régulière à huit branches (fig. 1a). En réalité, ils ont de nombreux autres points communs, mais nous y reviendrons… Pour l'instant, concentrons-nous sur cette étoile à huit branches. Il n'est pas difficile de déterminer qu'elle peut être construite à partir de deux carrés décalés d'un angle de 45° (fig. 1b). Pour étudier les symétries de cette étoile, il semble pertinent par conséquent d'examiner d'abord celles du carré seul.

QUELLES SONT LES SYMÉTRIES DU CARRÉ ?

Si vous pliez un carré en deux le long de l'une de ses diagonales ou d'une droite joignant les milieux de deux côtés parallèles (fig. 2), les deux moitiés se superposent exactement. Autrement dit, si vous disposez un miroir verticalement sur l'une de ces droites, la partie du carré située devant le miroir et son reflet reformeront le carré complet. Ces droites représentent les axes de symétrie du carré. Ce dernier en possède donc quatre. À chaque axe correspond une transformation géométrique, appelée réflexion, associant à un point son image dans un miroir qui serait placé sur cet axe. Celle-là laisse le carré globalement inchangé.
Mais ce n'est pas tout : si vous faites exécuter un tour complet à votre carré autour du point situé à l'intersection de ses axes, il se retrouvera quatre fois dans sa position initiale (pour chaque rotation dont l'angle est multiple d'un quart de tour). Ainsi, le carré possède également ce que l'on appelle un centre de rotation, dit « d'ordre 4 ». Pour résumer, le carré admet huit symétries de deux types : quatre réflexions et quatre rotations. Cet exemple nous permet d'entrevoir ce qu'est une symétrie : la propriété d'un objet à rester inchangé sous l'effet d'une transformation géométrique, telle qu'une rotation ou une réflexion. Par extension, une symétrie définit toute transformation géométrique qui peut laisser certains objets inchangés.
Au passage, notons que ce n'est pas un hasard si le centre de rotation est à l'intersection des axes de symétrie… En effet, tourner selon le centre de rotation équivaut à enchaîner deux réflexions suivant deux axes de symétrie. Sur la figure 3, nous avons coloré les sommets du carré pour que vous puissiez vérifier ce résultat : effectuer une réflexion selon l'axe vert puis une réflexion selon l'axe bleu équivaut à tourner le carré de 90° (dans le sens des aiguilles d'une montre). Les différentes symétries du carré sont intimement liées entre elles…

D'UN CARRÉ À UNE ÉTOILE

Revenons maintenant à notre étoile à huit branches. Elle est donc formée de deux carrés, dont l'un est tourné de 45° par rapport à l'autre. Puisque les centres de rotation de ces deux carrés coïncident, l'étoile à huit branches possède aussi un centre de rotation : le même que celui des deux carrés. En revanche, il n'est plus d'ordre 4 mais d'ordre 8 : si vous faites faire un tour complet à l'étoile autour de ce centre, elle va revenir huit fois à sa position initiale (à chaque rotation d'un angle multiple de 45°). De même, notre étoile à huit branches admet les mêmes quatre axes de symétrie que notre carré initial, et en gagne quatre autres. En effet, toutes les diagonales joignant deux sommets opposés de l'étoile en constituent un axe de symétrie. On retrouve naturellement

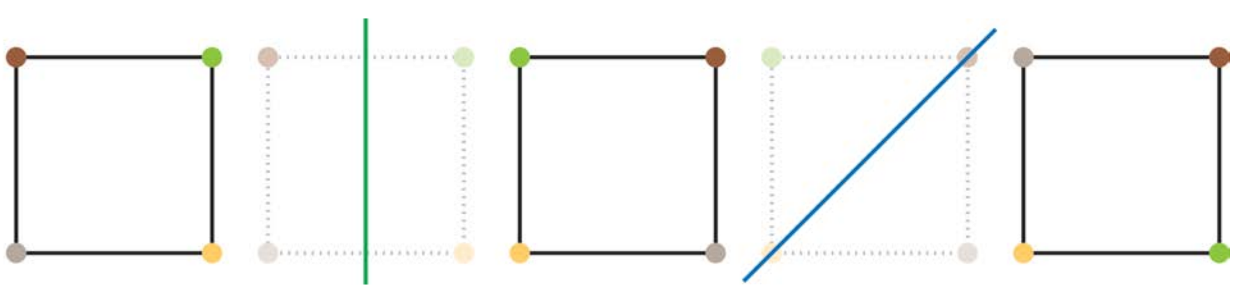

Figure 3. Tourner équivaut à réfléchir deux fois : appliquer au carré une symétrie d'axe vert suivie d'une symétrie d'axe bleu revient à le faire tourner d'un quart de tour.

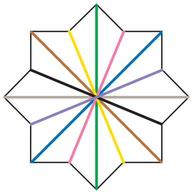

Figure 4. Les huit axes de symétrie de l'étoile à huit branches. © G. Reuiller.

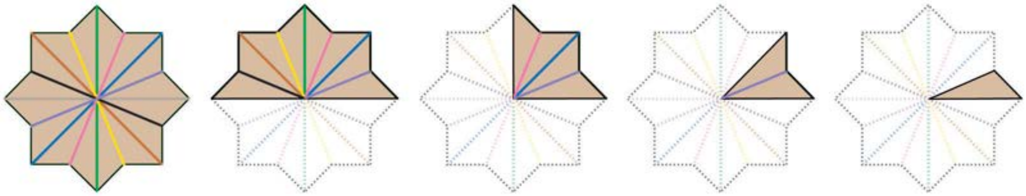

Figure 5. Réduction de l'étoile à huit branches à l'une de ses parties en quatre pliages. © G. Reuiller.

a) b)

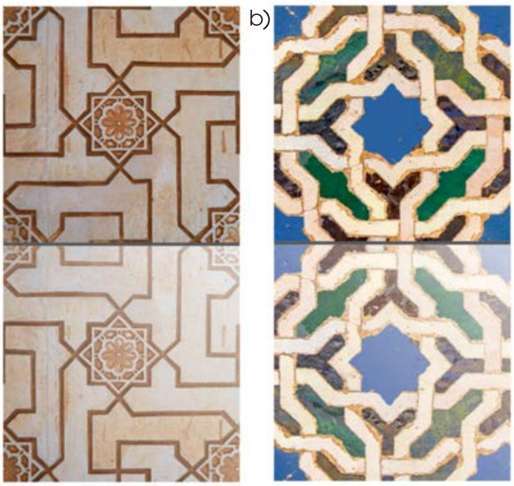

Figure 6. Ces extraits de pavages ne sont pas identiques à leur image dans un miroir. © G. Reuiller.

a) b) c)

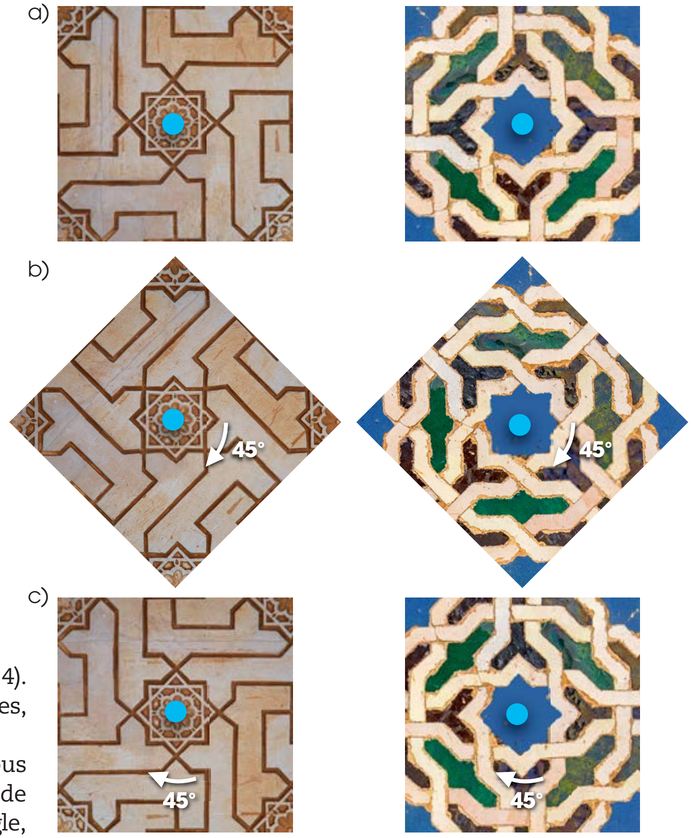

Figure 7. Si l'on tourne ces deux extraits de pavage (a) de 45°, ils ne reviennent pas à leur position initiale (b). Il faut les tourner pour cela d'encore au moins 45° (c). © G. Reuiller.

tous les axes de symétrie de l'octogone régulier (fig. 4). L'étoile à huit branches possède donc seize symétries, soit deux fois plus que le carré.

Une conséquence de ce résultat est la suivante : vous pouvez plier une étoile à huit branches quatre fois de suite en deux, de manière à vous ramener à un triangle, qui constitue un seizième de l'étoile entière (fig. 5). Là réside l'intérêt d'étudier les symétries d'un objet : pouvoir le réduire à l'une de ses parties, la plus petite possible qui permet de le reconstituer.

DE L'ÉTOILE AUX PAVAGES

Une question pourrait, à ce stade de l'article, tarauder le lecteur concentré : retrouve-t-on les symétries de l'étoile à huit branches dans les deux pavages dont elle est un élément constitutif ? Avant de répondre, une remarque préliminaire s'impose : en mathématiques, les pavages que nous étudions sont considérés comme infinis. Pour déterminer leurs symétries, il faut donc imaginer que les deux pavages dont nous présentons des extraits se prolongent à l'identique, sans fin. Même avec cette précaution, il est assez clair que le premier pavage n'admet aucun axe de symétrie (fig. 6a). La structure du second est un peu plus subtile, car seuls les entrelacements constitués par les pièces blanches excluent tout axe de symétrie. En effet, dans un miroir, les chevauchements dessus-dessous deviennent des chevauchements dessous-dessus (fig. 6b)… Sans ces entrecroisements, le pavage admettrait des axes de symétrie dans quatre directions différentes. En fait, vous pouvez relier quatre à quatre les centres des étoiles pour former des carrés (c'est le cas de l'extrait de la figure 6b) : les axes du pavage correspondraient alors à ceux de ces carrés.

OÙ L'ON FAIT TOURNER LES PAVAGES…

Il est assez naturel de chercher des centres de rotation des deux pavages étudiés parmi ceux des étoiles à huit branches. Bonne pioche : tous les centres de rotation de ces étoiles constituent aussi des centres de rotation pour les pavages. Cependant, d'ordre 8 pour les premières, ils ne sont plus que d'ordre 4 pour les seconds (fig. 7) !

Si nous avons « perdu » des symétries en passant de l'étoile à huit branches aux pavages, nous en avons

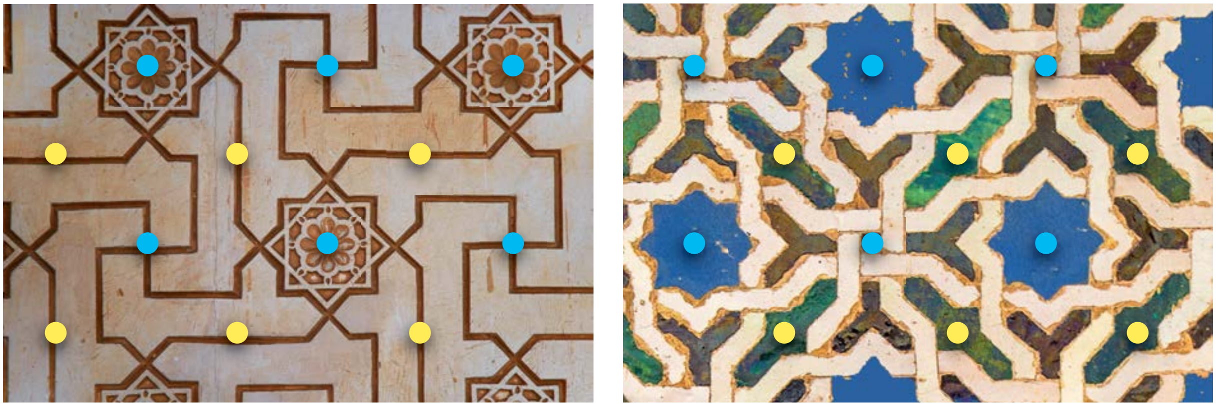

Figure 8. Les différents centres de rotation de nos deux pavages. En bleu ceux d'ordre 4 et en jaune ceux d'ordre 2. © G. Reuiller.

aussi « gagnées »… En effet, ces deux pavages admettent des symétries distinctes de celles de l'étoile : d'autres centres de rotation d'ordre 4 et des centres de rotation d'ordre 2, plus difficiles à trouver (fig. 8). De plus, les pavages présentent un autre type de symétrie : ils sont périodiques. On pourrait les reconstruire entièrement en reproduisant à l'infini les extraits de la figure 7 et en les plaçant les uns à côté des autres. Bref, les deux pavages héritent de certaines symétries des pièces qui les composent (dont les étoiles à huit branches) et en acquièrent de nouvelles liées à l'agencement de ces pièces entre elles.

PARCE QU'IL FAUT BIEN CONCLURE !

Au-delà de l'étoile à huit branches, ces deux pavages ont beaucoup en commun : ils possèdent exactement les mêmes symétries. Voilà une autre utilité à déterminer les symétries d'objets tels que les pavages : pouvoir considérer comme équivalents deux d'entre eux, alors qu'ils semblent relativement différents de prime abord. De manière plus générale, l'étude des symétries est un outil extraordinaire de classification des objets mathématiques.

Une dernière question pour finir : existe-t-il des pavages qui admettent des centres de rotation d'ordre 8, comme au cœur de l'étoile à huit branches ? Si l'on se restreint aux pavages périodiques (construits à partir d'un motif reproduit à l'infini), la réponse est non. Plus précisément, dans ce genre de pavages, seuls les ordres 2, 3, 4 et 6 sont possibles. Cette remarque peut paraître anodine, mais elle est pourtant d'une importance capitale, notamment en cristallographie. Et que dire des pavages non périodiques ? C'est une autre histoire… **G. R.**

En partenariat avec MathWorks

© Palais de la découverte / C. Rousselin.

Symétries, une nouvelle exposition permanente au Palais de la découverte

Multimédias, manipulations exploratoires, objets à toucher, livre musical…

Cette exposition interactive, située devant la salle Pi au niveau 1 du Palais de la découverte, vous propose d'approfondir la notion de symétrie et d'emprunter les passerelles qu'elle dresse entre les mathématiques et les arts ou les autres disciplines scientifiques.