Formes mathématiques

Géométrie pure laine

Avec un crochet et quelques pelotes de laine, on peut créer toutes sortes de formes insolites. Les napperons de nos grands-mères, généralement réalisés en tournant autour d'un point central, présentent de jolis motifs mais sont, très souvent, plats. Pour varier les plaisirs, on peut ajuster le nombre de mailles à chaque tour afin de fabriquer des surfaces courbes, allant du simple bonnet au récif corallien. Cette exploration est aussi l'occasion d'une rencontre entre mathématiques et activité manuelle.

PAR **GAËLLE VINCENT**, MÉDIATEUR DE L'UNITÉ DES SCIENCES DE LA VIE, ET **ROMAIN ATTAL**, MÉDIATEUR DE L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Trois surfaces en laine très différentes. Comment les fabriquer ? Les mathématiques peuvent-elles nous être utiles ? © EPPDCSI.

Le langage mathématique est si souple qu'il permet de décrire de façon inattendue des objets anodins de la vie quotidienne. De simples ouvrages réalisés au crochet peuvent devenir ainsi des représentations concrètes de notions générales de géométrie. Une alliance originale présentée à travers le dialogue d'une biologiste filophile avec un passeur d'idées mathématiques…

UN DISQUE PLAN

Romain Attal. Gaëlle, comment fabriques-tu ce napperon de laine en forme de disque plan ?

Gaëlle Vincent. Je fais trois types de mailles (fig. 1) : des doubles brides (représentées par le symbole), des mailles en l'air (représentées par un petit rond) et, pour fermer chaque tour, des mailles coulées (représentées par un petit arc de cercle). Au centre du disque, je réalise un cercle avec trois mailles en l'air reliées par une maille coulée. J'y accroche ensuite quatre autres mailles en l'air alignées : elles me donnent le rayon du premier disque, le plus petit, au centre. Comme nous l'avons appris à l'école, le périmètre P d'un cercle est proportionnel à son rayon r, selon la relation $P = 2\,\pi\,r$. Je crochète alors 19 doubles brides tout autour du cercle central et je ferme le tour avec une maille coulée. J'obtiens ainsi mon premier rang, composé de 20 mailles (cercle bleu sur la figure 1).

Pour obtenir un disque deux fois plus grand, il faudra deux fois plus de mailles, soit 40. Et pour chaque nouveau rang, il suffit d'augmenter le nombre de mailles toujours de la même quantité, afin que le périmètre du disque augmente proportionnellement à son diamètre. Je réalise donc successivement 20, 40, 60, 80 puis 100 mailles pour effectuer un tour. Le napperon reste alors bien plat, à condition que le fil soit correctement tendu. Néanmoins, des variations de tension du fil peuvent courber légèrement la surface. C'est le charme du fait main !

UNE SPHÈRE

R. A. Comment as-tu confectionné cette sphère en laine ?

G. V. J'ai assemblé autour d'une boule en polystyrène deux demi-sphères avec un fil rouge marquant l'équateur. Pour obtenir une demi-sphère, il suffit de procéder comme précédemment, en augmentant à nouveau à chaque rang le nombre de mailles, mais dans une moindre mesure que pour le disque plan. Je suis donc partie du sommet (composé de trois mailles en l'air, comme pour le disque plan) puis j'ai fait 12, 24, 38, 48, 56, 60, 62 et 63 mailles à chaque tour (fig. 2).

R. A. En théorie, on peut calculer qu'il aurait fallu plutôt en faire 12, 24, 35, 45, 53, 58, 62 et 63 (Pour aller plus loin : *Trois géométries, trois périmètres*), mais il y a toujours un écart entre la théorie et l'expérience, à cause de la tension exercée sur le fil et des légères variations de la taille des mailles.

G. V. On obtient, à peu près, une demi-sphère, et une fois fixée sur la boule de polystyrène, on ne détecte plus ces 10 % d'erreur. Si l'on donnait un coup de fer à repasser sur chaque demi-sphère, on les aplanirait et les mailles se répartiraient selon le diagramme simplifié de la figure 2.

R. A. La surface obtenue est dite « de courbure positive » car, au voisinage de chaque point P, elle se situe d'un seul côté du plan tangent T_P (fig. 3). Sur une selle de cheval, qui est de courbure négative, c'est le

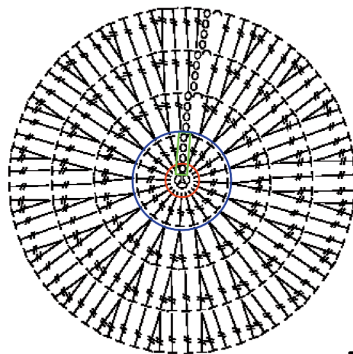

Figure 1. Diagramme du napperon plan. En rouge, le premier cercle. En vert, les quatre mailles déterminant le rayon du premier disque. En bleu, les vingt mailles formant ce premier disque. © EPPDCSI.

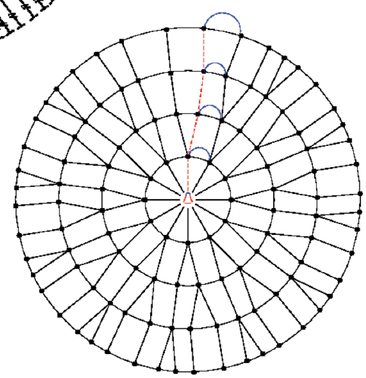

Figure 2. Diagramme simplifié des premiers rangs de la demi-sphère. © EPPDCSI.

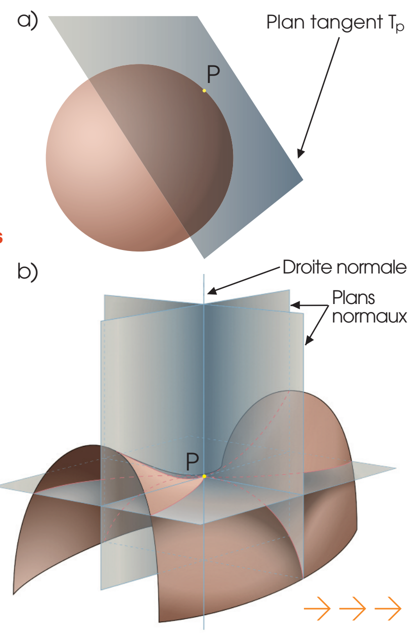

Figure 3. Sur la sphère, tous les chemins issus d'un point P partent vers le même côté du plan tangent en P (a). Sur une selle de cheval, certains chemins issus de P partent au-dessus du plan tangent tandis que d'autres partent au-dessous (b).
a) © EPPDCSI ;
b) © E. Gaba / Wikimedia Commons user : sting.

Figure 4. Certains lichens (a), laitues (b) et limaces de mer (c) peuvent présenter une surface de courbure négative.
a) © M. Rodrigues / Fotolia.com ; b) M. Pouzet / fotolia.com ; c) © M. Handler / National Geographic Society / Biosphoto.

contraire : au voisinage de chaque point P, le plan tangent traverse la surface. En partant de P, il y a des directions où l'on passe d'un côté de T_P et d'autres où l'on passe de l'autre côté de T_P.

UN NAPPERON HYPERBOLIQUE

G. V. La surface de droite sur la figure d'entrée est de courbure négative. Cette géométrie permet d'avoir une grande surface dans un petit volume. On trouve ainsi des êtres vivants courbés négativement (fig. 4). Par exemple, certains lichens (association d'un champignon et d'une algue) ont un mode de croissance qui leur confère une telle forme. Les laitues forment une surface de courbure presque partout négative. De même, la limace de mer *Elysia crispata* (fig. 4c), vivant dans la mer des Caraïbes, possède une jolie forme ondulée (on l'appelle aussi la laitue bleue).

R. A. Et comment réalise-t-on le disque hyperbolique en laine ?

G. V. À l'inverse de la sphère, il faut qu'à chaque rang le nombre de mailles, donc le périmètre, augmente plus vite que sur le disque plan. En effectuant douze mailles sur les trois mailles centrales puis, à chaque rang suivant, trois brides simples et une maille en l'air sur chaque maille du rang précédent, on obtient cette forme ondulée. Cette multiplication par quatre du nombre de mailles à chaque nouveau rang fait croître exponentiellement le périmètre : alors qu'à chaque nouveau rang, la distance au centre n'augmente que de 15 millimètres, le périmètre au quatrième rang est de 2,70 mètres ! En aplanissant ce disque, on obtient le diagramme simplifié de la figure 5.

TROIS MONDES DIFFÉRENTS

Dans de nombreuses situations mathématiques, c'est un paramètre analogue à la courbure qui permet de faire la distinction entre un monde dit sphérique – courbé positivement –, un monde plat – ou de courbure nulle – et un monde qualifié d'hyperbolique – courbé négativement. Les trois surfaces précédentes sont, en un certain sens, universelles : toute surface « classique » peut être obtenue en effet en collant des morceaux de plan, de sphère ou de plan hyperbolique. Le sentiment esthétique que ces objets suscitent, à qui sait les appréhender, est difficile à transcrire avec des mots ou des symboles, mais la nature nous offre parfois des modèles concrets et surprenants qui nous aident à le transmettre. **G. V. et R. A.**

Pour en savoir plus

Projet Crochet Coral Reef : > http://crochetcoralreef.org (en anglais)

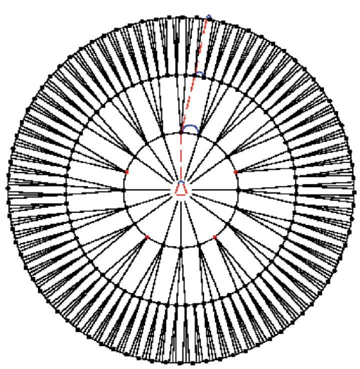

Figure 5. Diagramme simplifié des premiers rangs du disque hyperbolique.
© EPPDCSI.

Pour aller plus loin

Trois géométries, trois périmètres

Dans le plan usuel, dit euclidien, le périmètre d'un disque de rayon *r* est :

$$P_E(r) = 2\pi r$$

Il augmente donc proportionnellement à *r*.

Considérons une sphère de rayon *R* et de centre C. Le rayon *r* d'une calotte sphérique est la longueur de l'arc de cercle (en vert sur la figure I) qui joint son sommet S à son bord (en bleu sur la figure I). *r* est proportionnel au nombre de rangs du crochet. Cette calotte repose sur un disque plat de rayon *r'*. L'angle qui sous-tend, depuis C, l'arc de longueur *r* est, par définition, le rapport *r/R*. Le rayon *r'* s'exprime en fonction de cet angle avec la fonction sinus :

$$r' = R \sin(r/R)$$

Le périmètre de la calotte sphérique vaut donc :

$$P_S(r) = 2\pi r' = 2\pi R \sin(r/R)$$

La seule surface orientable, sans bord et de courbure positive constante est la sphère. Sa géométrie est déterminée entièrement par son rayon.

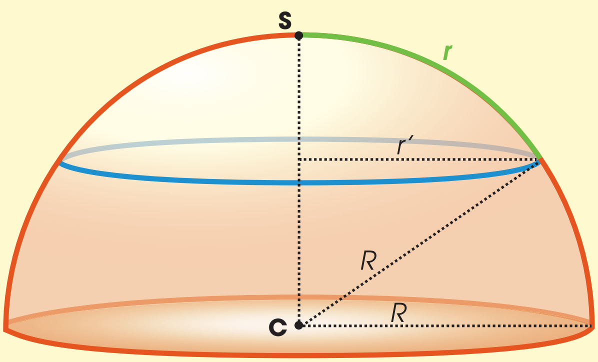

Figure I. Le cercle bleu, de rayon $r' = R \sin(r/R)$, a pour périmètre $2\pi R \sin(r/R)$. © EPPDCSI.

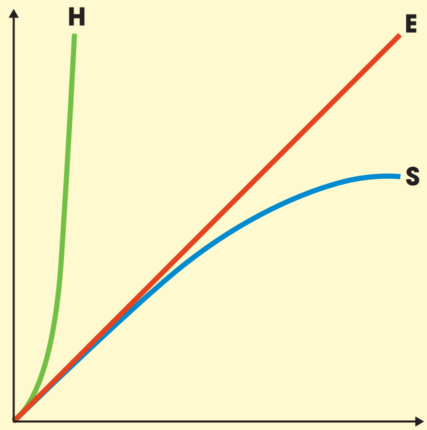

Figure II. Fonctions $P_E(r)$ en rouge, $P_S(r)$ en bleu et $P_H(r)$ en vert. © EPPDCSI.

Sur le plan hyperbolique, il faut remplacer la fonction sinus usuelle (sin) par la fonction sinus hyperbolique (sinh). Le périmètre d'un disque hyperbolique de rayon *r* vaut :

$$P_H(r) = 2\pi R \sinh(r/R)$$

Comparons les trois fonctions $P_E(r)$, $P_S(r)$ et $P_H(r)$ (fig. II) : quand *r* est petit, ces trois fonctions se ressemblent. Dans le cas présent, cela signifie que pour un petit disque, il y a très peu de différences entre les trois types de surface. Les utilisateurs de cartes géographiques le savent bien : il y a nettement moins de déformations sur une carte représentant une petite zone que sur la carte d'un pays, d'un continent ou du monde entier. Mais par la suite, la fonction $P_H(r)$ augmente beaucoup plus vite que $P_E(r)$, alors que $P_S(r)$ ralentit : les différences s'accentuent.