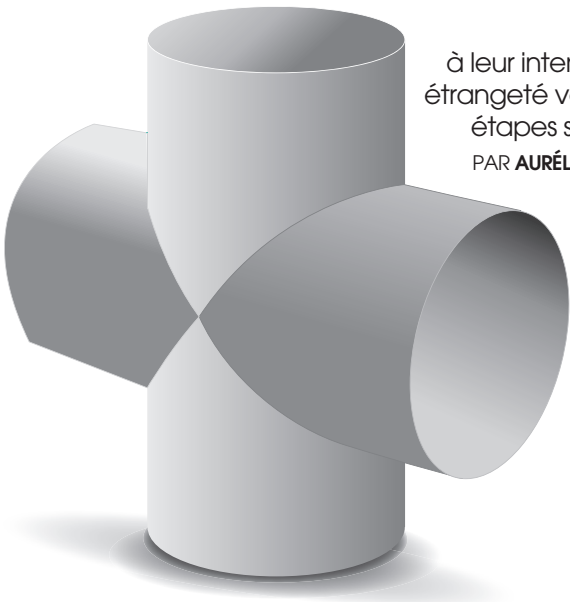
Formes mathématiques

Quand deux cylindres se rencontrent…

Deux cylindres de même rayon se rencontrent perpendiculairement. Quelle forme se trouve à leur intersection ? Faite de surfaces courbes et d'arêtes, son étrangeté vaut la peine de s'y intéresser de plus près. Quelques étapes suffiront à nous en donner une représentation fidèle.

PAR **AURÉLIE MABILLE**, UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE



Quel volume se trouve donc à l'intersection de ces deux cylindres ?
© EPPDCSI / O. Béourtare.

Il paraît difficile de se représenter la forme qui résulte de l'intersection de deux cylindres. On conçoit qu'une boule peut rentrer dans deux tubes de même diamètre qu'elle. Néanmoins, si l'on se concentre sur l'endroit où se croisent les parois des deux cylindres, on perçoit qu'il y a aussi *quelque chose de plus* que la boule.

En général, on peut engendrer des formes à partir d'un mouvement (telles que les « surfaces de révolution », obtenues en faisant tourner une courbe autour d'un axe) ou bien en prenant l'intersection de formes connues, comme celle de nos deux tuyaux. Savoir comment une forme est créée ne permet pas toujours de l'imaginer facilement (c'est le cas ici) ; mais cela nous fournit des informations. Définissons donc pas à pas les caractéristiques principales de notre « intersection », simplement en partant de son mode de construction. Tous les moyens sont bons pour la cerner !

ÉTUDIER LES SYMÉTRIES

Notre cas fait intervenir deux cylindres de même diamètre, présentant chacun un axe particulier, appelé « axe de révolution » en référence au fait que le cylindre s'obtient en faisant tourner une droite autour de cet axe fixe. Appelons J l'axe du cylindre jaune et V celui du cylindre vert.

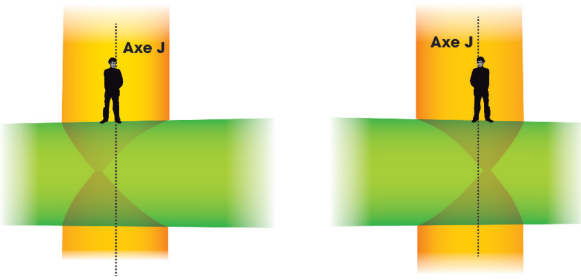


Figure 1. Si l'on tourne la tête de 180° à l'intérieur du cylindre jaune, on voit le cylindre vert exactement de la même façon ; il y a donc une symétrie d'ordre 2 suivant l'axe J. © A. Mabille / SketchUp.

Figure 2. Pour les mêmes raisons, l'axe vert offre également un axe de symétrie d'ordre 2.
© A. Mabille / SketchUp.

Plaçons-nous à l'intérieur du cylindre jaune, suivant son axe J. Faisons ensuite tourner le cylindre d'un demi-tour sur lui-même : l'autre cylindre nous apparaît exactement dans la même position et nous avons toujours la même vue de notre intersection (fig. 1). On dit que notre « forme » présente une symétrie d'ordre 2 selon l'axe J.

Hormis le fait que nos deux cylindres ont des couleurs et des noms différents, ils sont interchangeables. La situation est donc parfaitement identique pour un observateur placé le long de l'axe V. Ce qui nous permet d'affirmer que notre intersection admet un deuxième axe de symétrie d'ordre 2 : la droite V (fig. 2).

Par ailleurs, un troisième axe s'impose naturellement : celui qui est à la fois perpendiculaire à J et V, que nous noterons P (pour perpendiculaire). En effet, si l'on ne tient pas compte des couleurs, un observateur qui regarde l'intersection depuis cette droite ne verra pas de différence s'il fait tourner l'ensemble d'un quart de tour (fig. 3). Il y a donc aussi une symétrie d'ordre 4 par rapport à l'axe P.

EN PARTANT DE LA DÉFINITION D'UNE INTERSECTION

La définition mathématique d'une intersection peut s'exprimer ainsi : « l'intersection de A et B est constituée de tous les points qui appartiennent à la fois à A *et* à B ». Partir de cette définition de base peut nous aider… Entrons dans le tube jaune et regardons le tube vert venir le percuter. Vu de l'intérieur, on dirait que seul le tube vert imprime sa marque sur la forme recherchée : il existe un espace dans lequel la forme est déterminée entièrement par un seul tube. Et par symétrie, il en va de même pour chaque « face » : chacune d'elle est donc un morceau de cylindre.

Autrement dit, si l'on se situe dans l'intersection, selon l'axe P et face à un cylindre, chaque fois que l'on se tourne d'un quart de tour, on verra toujours un même morceau de paroi de l'un des deux tubes, en alternance. La forme recherchée est donc délimitée par quatre morceaux de cylindre identiques.

Cette approche permet de créer un premier modèle très approximatif en pâte à modeler (fig. 4). Chaque cylindre « imprime » deux parties identiques qui se

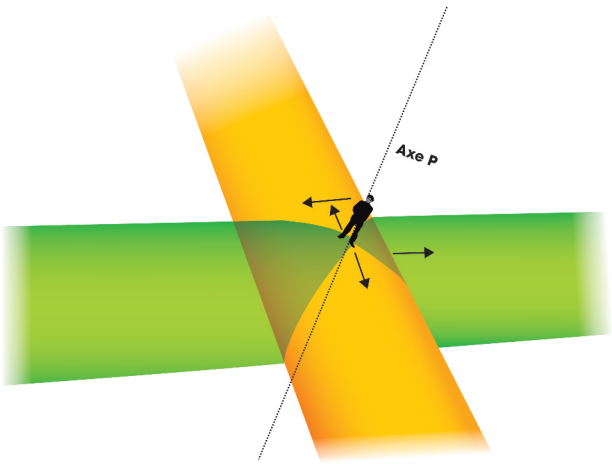


Figure 3. Suivant l'axe P, perpendiculaire aux deux cylindres, l'intersection présente une symétrie d'ordre 4. © A. Mabille / SketchUp.

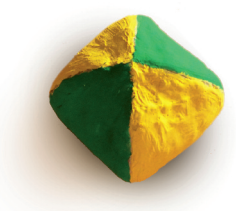


Figure 4. Premier modèle approximatif de l'intersection en pâte à modeler. Bien qu'il n'ait pas été fabriqué ainsi, on peut imaginer que l'on a fait passer une masse de pâte à l'intérieur d'un rouleau vert, puis d'un rouleau jaune. Chaque rouleau lui a imprimé sa forme et sa couleur. © A. Mabille.

font face et se rencontrent en deux points diamétralement opposés. Les plans contenant les frontières entre ces quatre parties sont, comme les cylindres, perpendiculaires entre eux. Et pour des raisons de symétrie, ils forment un angle de 45° avec les plans contenant P et J ou P et V. Cette observation va permettre la construction d'un modèle de l'intersection plus abouti.

UN MEILLEUR MODÈLE… ET DES COUPES

Prenons un rouleau d'essuie-tout et une petite scie. D'après ce qui précède, il suffit de scier le tube selon deux droites à 45° par rapport à un plan passant par son axe pour obtenir deux des quatre parois de notre intersection (fig. 5a). En répétant cette opération sur un second rouleau de même diamètre et en assemblant les éléments avec des languettes de papier collées aux jointures, on obtient un modèle nettement meilleur de notre forme (fig. 5b).

Dernière approche : découper la forme en tranches suivant des plans parallèles. Le résultat dépend de la direction selon laquelle on choisit de réaliser ces coupes. Si on la regarde avec l'axe de l'un des cylindres qui pointe vers notre œil, on croit voir un disque (fig. 6). Mais attention, toutes les sections planes de notre forme obtenues dans cette direction ne sont pas des disques ! Il n'y en aura d'ailleurs qu'une seule, celle du milieu.

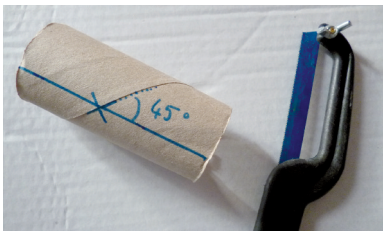
Si l'on regarde notre forme par « en haut », avec l'axe P orienté vers notre œil, on observe plutôt un carré (fig. 7). Cette fois, toutes les sections planes de notre forme selon des plans perpendiculaires à l'axe P sont bien des carrés ! On obtiendra d'abord un point, puis des petits carrés de plus en plus grands jusqu'à celui correspondant à la section de notre forme par le plan qui contient les deux axes J et V (fig. 8). Puis, les carrés seront de plus en plus petits avant de se réduire à un seul point.

Pour se convaincre que ces sections sont bien toutes des carrés, il suffit de se représenter un cylindre comme une infinité de droites disposées à égale distance de l'axe et parallèlement à celui-là. La coupe d'un cylindre par un plan parallèle à cet axe donnera donc, le plus souvent, deux droites parallèles si le cylindre est considéré comme infini, ou un rectangle s'il est délimité de part et d'autre, par exemple par un autre cylindre qui le croise.

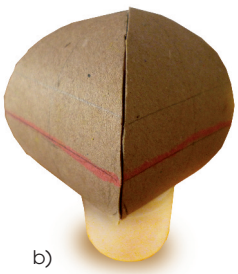
Les axes de symétrie, la connaissance des sections planes, deux modèles : on peut dire que nous commençons à avoir une idée précise de la forme que nous cherchions ! Au point de tenter, par exemple, de calculer son volume (Pour aller plus loin : *Le principe de Cavalieri*). **A. M.**

Pour en savoir plus

Sur le principe de Cavalieri :
Audin P., « Des formules dans les formes », *Découverte* n° 355, mars-avril 2008, p. 58-61.



a)



b)

Figure 5. a) Construisons un modèle de l'intersection de deux cylindres… b) Nous obtenons bien la même forme que celle de la figure 4, en mieux ! © A. Mabille.

Figure 6. Vue depuis l'axe d'un cylindre, notre forme ressemble à un disque. Mais si nous coupons ailleurs qu'au milieu, nous n'obtenons pas un disque ! © A. Mabille.

Figure 7. Notre forme observée suivant l'axe P : on voit un carré. © A. Mabille.

Figure 8. Chaque « tranche » horizontale est un carré, le plus grand se trouvant au milieu (représenté ici en rose). © A. Mabille.

Pour aller plus loin

Le principe de Cavalieri

Le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri (1598-1647) a établi que deux solides coincés entre deux plans parallèles, et dont les sections à chaque étage sont de même surface, ont un volume identique. Et si les surfaces des sections des deux solides sont toujours dans le même rapport, ce sera aussi le cas pour les volumes. Intuitivement, on peut découper un solide en tranches, son volume ne dépendra ni de l'agencement de ces tranches, ni de leur forme (fig. I).

Pour calculer le volume de notre intersection, il suffit donc de trouver un solide de volume connu, dont les sections par des plans perpendiculaires à la droite P (droite perpendiculaire à chacun des deux cylindres) sont en rapport constant avec ses propres sections carrées. On a déjà vu qu'un certain volume connu s'insère dans notre intersection en épousant les parois des cylindres, tout en étant trop petit pour la remplir complètement : il s'agit de la boule de même diamètre. En effet, une telle boule est tangente à l'intersection et chacune de ses sections circulaires est un cercle tangent aux sections carrées de notre forme (fig. II).

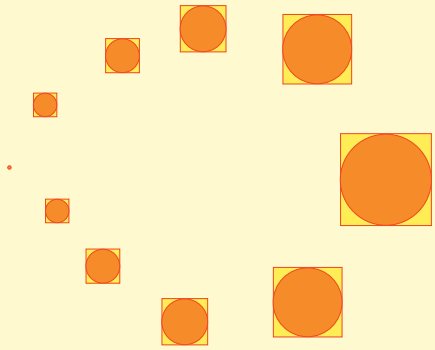


Figure II. Succession des coupes de l'intersection et de sa boule tangente, selon des plans perpendiculaires à P. Le résultat est à chaque fois un disque et un carré tangents. © A. Mabille / Geogebra.

À chaque coupe, le rapport entre les deux surfaces (noté λ) est donc constant et égal à la surface d'un carré de côté $2r$ sur la surface d'un disque de rayon r, soit :

$$\lambda = 4r^2 / \pi r^2 = 4 / \pi$$

Ce rapport ne dépend pas de la coupe choisie : il s'agit bien d'une constante ! Le principe de Cavalieri nous permet d'en déduire le volume de notre intersection ($V_{\text{Intersection}}$) : il est égal au volume de la sphère multiplié par le rapport des surfaces que l'on vient d'obtenir. Si l'on note R le rayon des deux cylindres (et de la sphère), cela donne :

$$V_{\text{Intersection}} = \lambda \times 4\pi R^3 / 3 = 4 / \pi \times 4\pi R^3 / 3 = 16R^3 / 3$$

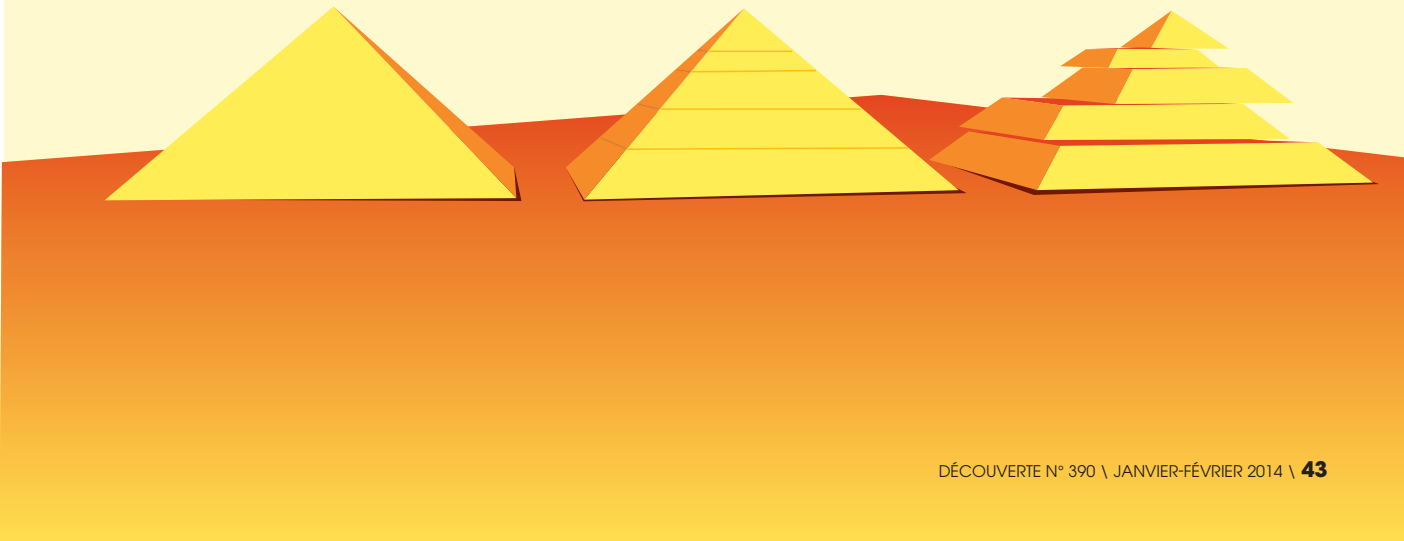


Figure I. Le volume de la pyramide à gauche et celui de l'objet à droite, obtenu en déplaçant certaines de ses tranches, sont identiques. © A. Mabille / SketchUp.