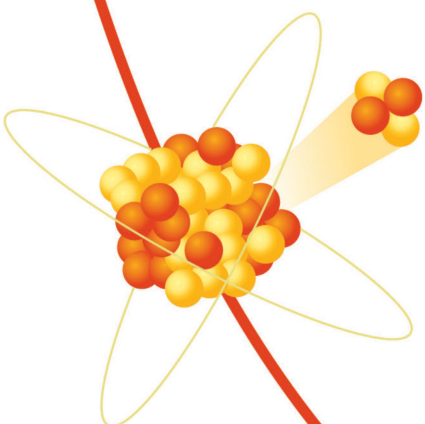
Formes mathématiques

Exponentielle, radioactivité et bière



La courbe ci-contre est ce que l'on appelle *une exponentielle décroissante*. L'exponentielle, croissante ou décroissante, fait partie des courbes immanquables en mathématiques. À l'instar de pi, que l'on retrouve dans des chapitres divers et variés – probabilités, nombres premiers ou encore, bien évidemment, géométrie –, l'exponentielle se rencontre un peu partout, et au-delà des mathématiques également, de la modélisation de la radioactivité à celle de la mousse de bière, en passant par le temps d'élimination des médicaments dans le sang. De nombreuses personnes, en dehors d'un cadre scientifique, utilisent d'ailleurs l'expression « croissance exponentielle » – même si ce n'est pas toujours à propos – pour signifier que « ça va très vite »…

DÉSINTÉGRATION D'UN CORPS RADIOACTIF

Prenons l'exemple de la radioactivité afin de comprendre intuitivement ce qu'est une croissance (ou une décroissance) exponentielle. Pour modéliser le comportement d'un corps radioactif, adoptons le point de vue des physiciens : chacun des noyaux peut, à chaque instant, se désintégrer. Toutefois, contraire-

Quel rapport y a-t-il entre cette courbe, la radioactivité et la mousse de bière ?

© R. Paillard.

Y a-t-il une relation entre la radioactivité et la bière ? Aucune réponse ne nous vient spontanément à l'esprit. Et pourtant, les mathématiques permettent, une fois de plus, de relier des phénomènes sans aucun point commun... en apparence seulement ! En effet, la désintégration de noyaux radioactifs et la mousse de bière illustrent toutes deux la loi exponentielle.

PAR **ROBIN JAMET**, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE DE L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

ment à d'autres phénomènes (apparition de fissures, décès, panne...), la probabilité pour un noyau de se désintégrer ne change pas au cours du temps. Autrement dit, on considère qu'il n'y a pas d'usure : un noyau qui ne s'est pas désintégré jusqu'alors n'a pas plus de chances de se désintégrer par la suite. On fait comme si l'on repartait à zéro à chaque instant pour les noyaux restants. On parle généralement de phénomènes sans mémoire ou, dans le cas de phénomènes qui se produisent étape par étape, d'événements indépendants. Les exemples simples d'événements indépendants sont nombreux, à commencer par tous les jeux de hasard classiques !

Ainsi, dans le jeu du « pile ou face », le résultat obtenu lors d'un tirage n'influence absolument pas le résultat suivant. Une pièce qui tombe trois fois de suite sur le côté pile n'aura pas plus de chances de tomber sur le côté face la fois d'après ; elle n'a pas de « mémoire ». Le cas du « pile ou face » permet donc d'appréhender d'une première manière, approximative et intuitive, la fameuse courbe qui décrit la disparition de radioactivité dans un corps. Lancez un grand nombre de pièces de monnaie. Écartez toutes celles qui sont tombées du côté pile et empilez-les à part. Puis prenez les pièces restantes et réitérez l'expérience. À nouveau, un certain nombre de pièces tombent du côté pile. Récupérez-les et constituez une deuxième pile à côté de la première. Recommencez ainsi de suite jusqu'à épuisement des pièces. En principe, et à condition d'avoir un nombre suffisant de pièces au départ, vous devriez voir apparaître un « escalier » d'une forme qui avoisine celle de la courbe ci-contre. On peut réaliser également cette expérience avec des dés, en choisissant le nombre de faces qui « éliminent » un dé (fig. 1).

Bien entendu, plus on se munit d'un grand nombre de pièces, moins les « marches » sont visibles, et plus on se rapproche de la courbe dessinée. Pourquoi une exponentielle ? Une courbe exponentielle est définie par un nombre, a, et par la valeur prise par la fonc-

tion à un instant donné t qui vaut a^t. Or, si l'on suppose le nombre de pièces très grand, on peut parler de proportion de pièces qui disparaissent à chaque étape : la loi des grands nombres nous autorise à affirmer qu'à chaque tirage, approximativement, une proportion de pièces égale à la probabilité d'être « éliminée » le sera effectivement. Dans le jeu du « pile ou face », cela signifie qu'à chaque tirage, environ la moitié des pièces restantes sera mise de côté. Ainsi, à chaque étape, une certaine proportion p subsiste, « survit », ne se désintègre pas (ce qui signifie qu'une proportion $(1 - p)$ disparaît). Si l'on part d'une quantité N de noyaux radioactifs, il en restera par conséquent $p \times N$ après la première étape ; puis $p \times (p \times N)$, soit $p^2 \times N$ après la deuxième ; $p \times (p^2 \times N)$, donc $p^3 \times N$, après la troisième, etc. On voit bien apparaître la notion de puissance, ce qui permet d'expliquer intuitivement pourquoi un phénomène sans mémoire suivra une loi exponentielle.

DANS LE MONDE CONTINU

À notre échelle, la matière ne semble pas constituée de petits grains, mais ressemble plutôt à quelque chose de continu. Un phénomène qui suit une loi exponentielle sera tel que la quantité qui disparaît (ou apparaît) à chaque instant est proportionnelle à la quantité existante. Cela signifie que si l'on prend le cas d'une exponentielle croissante, non seulement la population croît, mais elle croît de plus en plus vite. À l'inverse, plus la

Figure 1. Expérience proposée au Technorama de Zurich, réalisée avec des dés dont deux faces sur les six « éliminent » le dé. On voit apparaître ici un début d'escalier exponentiel. Cette manip est présentée également par le Palais de la découverte dans l'un de ses stands itinérants. Avec l'aimable autorisation du Swiss Science Center Technorama.

quantité d'un élément présente au départ est faible et plus sa vitesse de disparition ralentit, sans jamais atteindre zéro toutefois (une fraction d'une quantité non nulle n'est jamais nulle !). Ainsi, pour une exponentielle décroissante, la diminution est de plus en plus lente, donc très longue.

Formulé en termes mathématiques, on peut dire que si $N(t)$ représente la quantité (de noyaux ou autre) restante à l'instant t, alors la *dérivée de N* (N'), c'est-à-dire la *pente* de la fonction N – la vitesse à laquelle la quantité évolue – est proportionnelle à N elle-même. Donc $N'(t) = kN(t)$ (k : coefficient de proportionnalité). Or, toutes les personnes ayant déjà côtoyé l'exponentielle savent que sa dérivée est... l'exponentielle elle-même : la pente de la courbe à tout instant est égale à sa propre valeur. Le fait de multiplier par un quelconque coefficient ne change pas fondamentalement les choses. Encore un moyen d'établir un lien entre la loi simple donnée et la courbe exponentielle...

DEMI-VIE ET LIMITES DE LA MODÉLISATION

Arnd Leike, un physicien allemand, a remporté l'Ig Nobel* de physique en 2002 pour avoir démontré que la disparition de la mousse de bière suit également une loi exponentielle : la quantité de mousse disparaissant à chaque instant ne dépend que de la quantité de mousse qui subsiste à ce même moment (fig. 2). Amusé par cette récompense, dont il connaissait l'existence, Leike s'est rendu à la remise des prix. À cette occasion, il a précisé cependant que ce bref passage de sa publication ne servait qu'à illustrer la loi exponentielle grâce à un phénomène de la vie quotidienne, permettant ainsi de mieux l'appréhender. L'exemple de la mousse de bière, plus « accessible » au grand public que la radioactivité, laisse entrevoir effectivement que cette loi peut se retrouver un peu partout, et pointe aussi les limites de ces modèles. Selon cette théorie, en un certain laps de temps, la moitié de la mousse disparaît, ce que les physiciens nomment la *demi-vie*. Cela signifie donc qu'au bout du double de cette durée, il reste un quart de la quantité de mousse initialement contenue dans le verre – puis un huitième, un seizième et ainsi de suite. Or, tout le monde sait que la moitié de la moitié de la moitié, etc., d'une quantité ne vaudra jamais zéro. Il y aurait donc toujours de la mousse dans le verre de bière... si le modèle était tout le temps valable, mais il ne l'est bien sûr que lorsque les quantités en jeu sont assez importantes (et lorsque l'on ne boit pas la bière).

Par ailleurs, il est étonnant de constater que le modèle choisi pour la désintégration des noyaux est continu alors qu'il n'y a qu'un nombre fini (même si très élevé) de noyaux considérés. Le modèle reste donc légitime jusqu'à ce que le nombre de noyaux ne soit plus « grand ». Les probabilités simples prennent ensuite le relai et garantissent que les noyaux radioactifs finiront par tous se désintégrer (et leur nombre de valoir strictement zéro), en un temps très long mais fini ! **R. J.**

* L'Ig Nobel (prononcé « Ignobel ») est une récompense iconoclaste concernant la plupart du temps des travaux très sérieux « qui font rire d'abord et réfléchir ensuite ». Ils dénoncent parfois des recherches douteuses, mais pas toujours.

Figure 2. L'auteur de cet article n'a pas hésité à se sacrifier pour prendre des photographies de la mousse disparaissant dans son verre... sans y toucher ! Le résultat est à peu près conforme à la théorie : il y a un rapport quasi constant entre les hauteurs de mousse d'un cliché à l'autre, pris à intervalles de temps réguliers. © R. Jamet, R. Paillard.